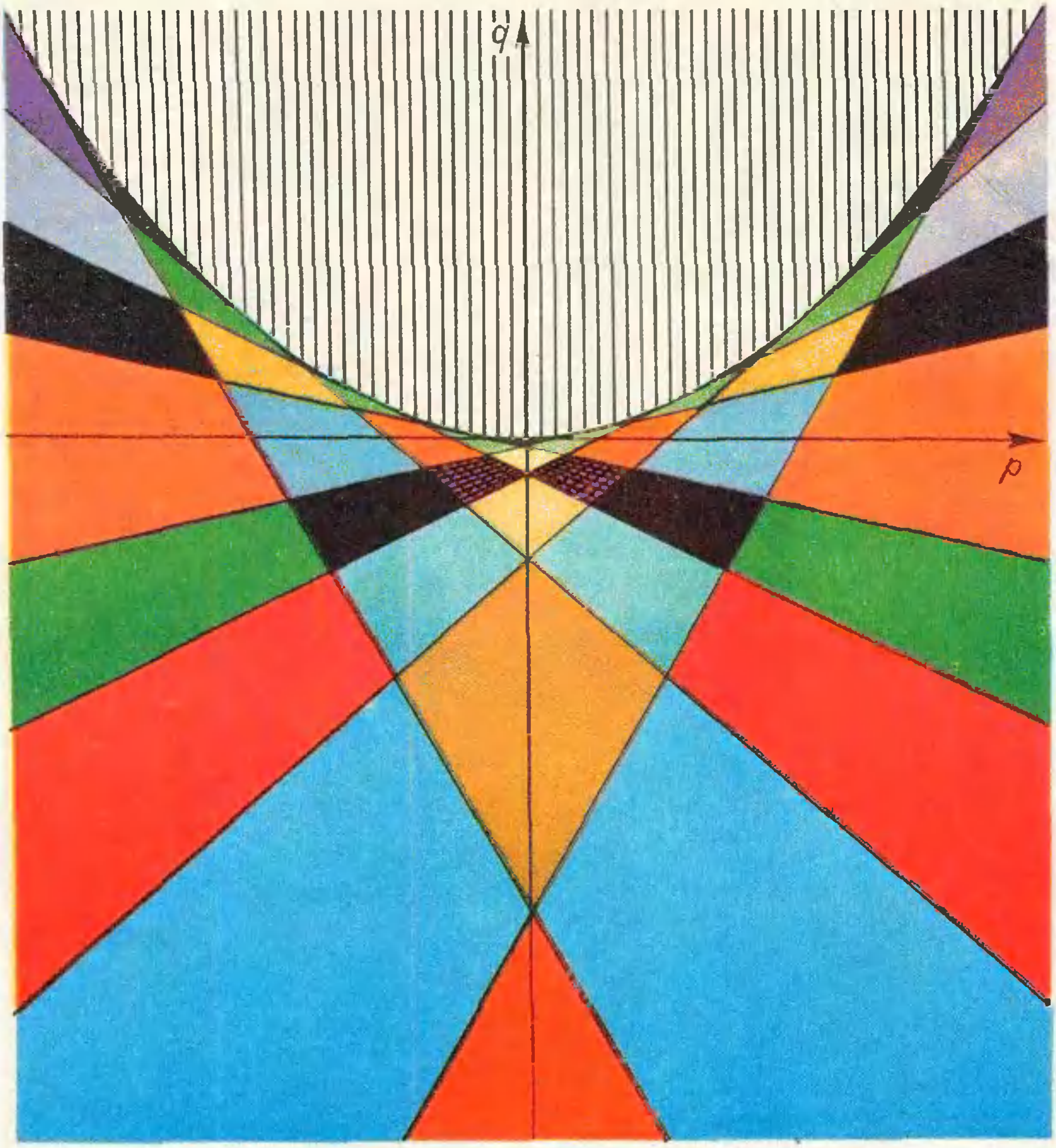
ISSN 0130-2221

Квант

2
1981

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР



Поставим в соответствие каждому квадратному трехчлену $x^2+p_0x+q_0$ точку $(p_0;\ q_0)$ на плоскости $(p,\ q)$; это соответствие взаимно однозначно. Парабола $q=\frac{p^2}{4}$ на рисунке отделяет точки, соответствующие трехчленам с двумя корнями, от точек, соответствующих трехчленам без корней. Каждая прямая $c^2+pc+q=0$ состоит из точек, соответствующих трехчленам, один из корней которых равен c. Все эти «корневые прямые» касаются «дискриминантной параболы» (на рисунке изображены такие прямые для $c=\pm 1,\ \pm 2,\ \pm\frac{2}{3},\ \pm\frac{1}{2}$).

Каждая из областей, на которые плоскость делится корневыми прямыми, состоит из точек, соответствующих трехчленам, корни которых расположены определенным образом. Например, точкам желтого четырехугольника отвечают трехчлены, для корней x_1, x_2 которых $-\frac{3}{2}<x_1<-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<x_2<\frac{2}{3}$.

Подумайте, что можно сказать о корнях трехчленов x^2+px+q, если точка $(p,\ q)$ принадлежит какой-нибудь из закрашенных областей. Более подробно о связи точек плоскости (p,q) и трехчленов x^2+px+q рассказано в статье В. Вавилова «Сетчатые номограммы» («Квант», 1978, №9).

Квант

2
1981

Основан в 1970 году

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ:

О красочных этюдах, показанных на первой и последней страницах обложки, более подробно рассказано на с. 39.

Навстречу XXVI съезду КПСС

23 февраля Кремлевский Дворец съездов примет участников XXVI съезда Коммунистической партии Советского Союза. Съезд рассмотрит и утвердит Основные направления экономического и социального развития СССР на 1981—1985 годы и на период до 1990 года, проект которых был опубликован в центральной печати в начале декабря 1980 года. Три месяца наш народ предельно заинтересованно и откровенно обсуждал этот важнейший документ современности. При этом было внесено много конкретных дополнений, изменений и уточнений, учет которых превратил его в плод коллективного разума всего народа.

Десять лет нам предстоит жить и работать на основе решений, которые примет XXVI съезд КПСС. Реализация намеченной им программы приблизит нашу страну к заветной цели — коммунизму. И в этом огромную роль должна сыграть наука. С ней неразрывно связаны многие разделы проекта Основных направлений. Покажем это на примере физико-математических наук, которым посвящен наш «Квант».

Третий раздел проекта Основных направлений экономического и социального развития СССР на 1981—1985 годы и на период до 1990 года посвящен развитию науки и ускорению технического прогресса. В нем, в частности, сказано следующее:

«В области естественных и технических наук сосредоточить усилия на решении следующих важнейших проблем:

развитие математической теории, повышение эффективности ее использования в прикладных целях;

развитие физики элементарных частиц и атомного ядра с целью дальнейшего познания строения материи;

развитие ядерной и создание основ термоядерной энергетики, совершенствование методов преобразования и передачи энергии; ...

совершенствование вычислительной техники, ее элементной базы и математического обеспечения, средств и систем передачи и обработки информации, повышение эффективности автоматизированных систем управления, развитие сетей ЭВМ и вычислительных центров коллективного пользования; ...

дальнейшее изучение и освоение космического пространства в интересах развития науки, техники и народного хозяйства; ...».

В третьем разделе также сказано:

«На основе использования достижений науки и техники:

развивать производство и обеспечить широкое применение автоматических манипуляторов (промышленных роботов), встроенных систем автоматического управления с использованием микропроцессоров и мини-ЭВМ, создавать автоматизированные цехи и заводы. Расширять автоматизацию проектно-конструкторских и научно-исследовательских работ с применением электронно-вычислительной техники; ...

использовать электрохимические, лазерные, радиационные и другие высокоэффективные методы обработки металлов, материалов и изделий с целью существенного улучшения их свойств;...

увеличить масштабы использования в народном хозяйстве возобновляемых источников энергии (гидравлической, солнечной, ветровой, геотермальной)».

Лаконичен язык этого документа, но за каждой из процитированных строк стоят важные проблемы нашего народного хозяйства, которые нельзя решить без огромной помощи физико-математических наук.

Немало конкретных заданий, тесно связанных с физикой и математикой, включено и в четвертый раздел проекта Основных направлений, посвященный развитию промышленности. Рост и совершенствование промышленного производства, увеличение выпуска необходимой народу продукции требуют непрерывного увеличения энергетических мощностей. В связи с этим перед энергетической промышленностью ставятся очень сложные задачи. Необходимо «довести выработку электроэнергии в 1985 году до 1550—1600 млрд. киловатт-часов, в том числе на атомных электростанциях до 220—225 млрд. киловатт-часов и на гидроэлектростанциях до 230—235 млрд. киловатт-часов. Обеспечить прирост производства электроэнергии в европейской части СССР в основном на атомных и гидроэлектростанциях.

Ввести в действие на атомных электростанциях 24—25 млн. киловатт новых мощностей. Продолжить работы по освоению реакторов на быстрых нейтронах и использованию ядерного топлива для выработки теплоэнергии».

Все это связано с решением сложных научно-технических проблем, прежде всего — в области физики.

Не менее сложные задачи, решение которых просто невозможно без активного участия физико-математических наук, возникают и во многих других отраслях нашего народного хозяйства: в электротехнической и приборостроительной промышленности, черной и цветной металлургии, на транспорте, в строительстве и технике связи.

Прошлую, десятую, пятилетку вы, наши основные читатели, провели в школе. Кто-то за вас плавил металл и выращивал хлеб, прокладывал рельсы БАМа и строил КАМАЗ. Вы учились на всем готовом, за счет труда своих родителей, всех тех, кто старше вас. В одиннадцатой пятилетке вы окончите школу и уйдете в напряженную самостоятельную трудовую жизнь. В двенадцатой многие из вас станут уже мастерами различных профессий. Планы, которые сегодня обсуждает наш народ, XXVI съезд нашей родной коммунистической партии, станут планами вашей дальнейшей жизни. Всмотритесь в них внимательно и выбирайте. Впереди много интереснейшей работы и ее хватит на всех. Мир не стоит на месте. Он быстро меняется. И особенно быстро должна совершенствоваться и развиваться наша страна, идущая по неизведанным путям навстречу коммунизму.

Наша будущая жизнь наполнена интереснейшими проблемами. Многие из них тесно связаны с наукой, в том числе — с математикой, механикой и физикой. И тот, кто выберет их своей будущей профессией, никогда не пожалеет. Романтика научного поиска, муки творчества, радость победы, ощущение общественной полезности вашего труда сделают всю вашу жизнь яркой и интересной.

И. Франк

Путь в науку

Пытаясь заглянуть в будущее, юность мечтает. Счастлив тот, кто не расстается со своей мечтой и в дальнейшей жизни. Мне ближе всего тот, кто уже с юных лет стремится к занятиям наукой. Не только в мечтах, но и в действительности наука необычайно увлекательна. Но, чтобы стать ученым, надо быть искренне и бескорыстно преданным науке и не бояться трудностей.

Первые шаги обычно облегчены учителями, если, разумеется, они не только знают, но и любят науку. И тема первой работы, и метод ее выполнения часто бывают подсказаны руководителем. Это хорошо, так как приобретение опыта необходимо, а та научная среда, в которую попадает начинающий, для последующего немаловажна. Начинающему можно и нужно помочь учиться, и все же научиться он может только сам. При этом первые самостоятельно сделанные шаги, которые радуют как некоторые достижения, зачастую ведут к разочарованию. Нередко оказывается, что полученный результат уже был кем-то найден ранее, а идея, представляющаяся новой, на самом деле не только не нова, но, возможно, уже оставлена как ошибочная. Но огорчаться не следует. Самое главное и наиболее ценное в науке — элемент творчества. Самостоятельно пройти участок пути, даже пройденный другими,— это полезно и часто необходимо. Тем не менее после нескольких таких «неудач» возникает ощущение, что в науке все известно. В действительности объяснение иное. Первоначальные знания невольно подсказывают и путь, по которому уже прошли многие. Умение мыслить по-своему не возникает сразу, оно вырабатывается трудной и напряженной работой. Что касается науки, то никогда не следует забывать слова Ньютона, сказанные им незадолго до смерти: «Не знаю,

---

Академик Илья Михайлович Франк — лауреат Нобелевской и Государственной премий, директор лаборатории нейтронной физики Объединенного института ядерных исследований, профессор Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Статья перепечатывается из сборника «Ленин. Наука. Молодежь», выпущенного в 1980 году издательством «Наука».

чем я могу казаться миру, но сам себе я кажусь только мальчиком, играющим на морском берегу, развлекающимся тем, что до поры до времени отыскиваю камешек более цветистый, чем обыкновенно, или красную раковину, в то время как великий океан истины расстилается передо мной неисследованным».

Не случайно Ньютон видит себя мальчиком, так как именно мальчиков больше, чем взрослых, занимают поиски «цветистых камешков», а ум их свеж и легче различает необычное. Мне думается, что одна из необходимых и счастливых черт ученого — это любознательность, так свойственная детству и так легко теряемая взрослыми. Ньютон был гений, таких в истории науки немного. Не удивительно, что он находил удивительные камешки там, где другие видели только одноцветные россыпи песка, и не только находил, но и строил из них поразительной красоты здания.

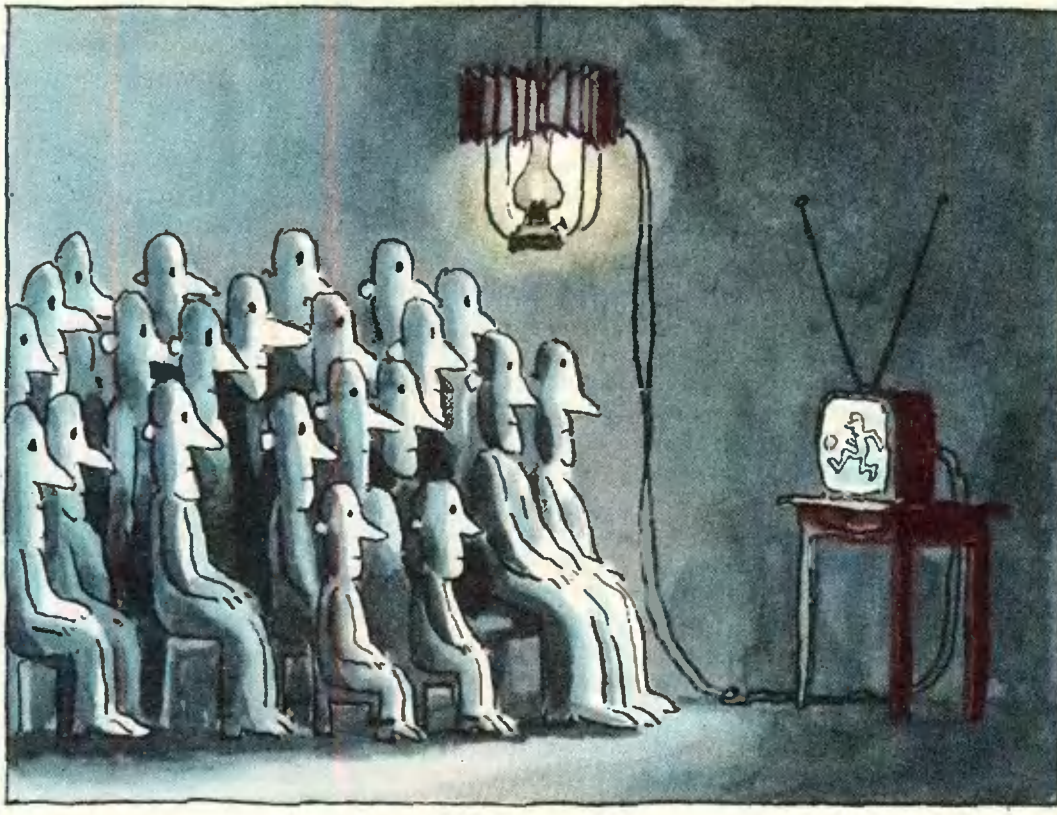
После Ньютона к океану истины было проложено множество новых путей и найдены замечательные камешки и раковины, но океан истины попрежнему безбрежен. Каждый, кто не лишен таланта и умения искать, найдет в нем нечто свое.

Мечты юности не лишены иллюзий. Одна из них — в том, что у начинающего неограниченно много времени впереди. Невольно рассуждают так: «Я пока не знаю и не понимаю этого, но мне незачем торопиться. Я молод и все еще успею». В действительности, какую бы длинную творческую жизнь ни подарила нам судьба, все равно не успеваешь узнать и малой доли того, что необходимо для работы, а тем более выполнить все, что мог бы сделать. Вам, конечно, известны слова Павлова: «Помните, что наука требует от человека всей его жизни. И если у вас было бы две жизни, то и их не хватило бы вам» и «всегда имейте мужество сказать себе: я невежда».

Наши молодые годы наиболее плодотворны. К сожалению, лишь дожив до старости, по-настоящему понимаешь, что не только молодость, но и вся жизнь пролетает необыкновенно быстро. И все же именно в молодом возрасте жажда знаний и интерес к науке заставляют нас особенно много работать. Без этого пути в науку вообще были бы закрыты.

В призыве работать содержится нечто существенно большее, чем обычное наставление родителей детям-школьникам, что надо учиться хорошо. Науке нужно не механическое запоминание материала (это плохо и для школьников), а подлинное творческое овладение знаниями и методами. Основанное на них умение по-своему ставить вопросы и отвечать на них или видеть неясность там, где другие ее не замечают,— это и есть то, что позволяет найти красивый камешек там, где другие не видят ничего, кроме песка. Здесь не просто удача, здесь прежде всего труд и множество неудач, через которые необходимо мужественно пройти.

Сумма знаний в любой области науки огромна, и невозможно знать всего. Нельзя, например, в деталях знать все, над чем работают физики. Однако нужно быть в курсе основных идей и событий и вне своей специальности. Ученый обязан быть широко образованным, по-настоящему интеллигентным человеком. Вопросы человеческой культуры и проблемы общественной жизни не могут быть ему чужды. Как найти время на все? Это, конечно, трудно в любом возрасте, но в молодые годы больше времени и сил, зато умение работать и широта знаний приходят с годами.



А. Иоффе

Полупроводниковые термоэлементы и холодильники

Термоэлементы

В 1822 году Зеебек заметил, что замкнутая цепь, составленная из двух различных проводников (термоэлемент), отклоняет расположенную вблизи магнитную стрелку всякий раз, когда места контакта проводников имеют различные температуры.

Отклонение стрелки было вызвано появлением электрического тока в цепи. Любопытно, что Зеебек долго и упорно отрицал такое объяснение, считая, что открытое им явление вызвано намагничиванием проводников.

Термоэлемент можно было бы рассматривать как термоэлектрическую машину, которая без всяких движущихся механизмов превращает часть тепловой энергии, нагревающей горячий спай, в электрическую энергию; при этом остальная часть тепла отдается холодным спаем в окружающую среду. Но одновременно большой поток тепла переходит от горячего спая термоэлемента к холодному путем теплопроводности, а из создаваемой термоэлементом электрической энергии некоторая часть превращается в тепло внутри самого же термоэлемента и не может быть использована. Эти бесполезные затраты того запаса тепла, который получает горячий спай, настолько велики, что коэффициент полезного действия, соответствующий превращению сообщаемой горячему спаю тепловой энергии в электрическую, для термоэлемен-

---

Академик Абрам Федорович Иоффе — выдающийся физик, один из создателей советской физики. В 1980 году исполнилось 100 лет со дня его рождения и «Квант» отметил этот юбилей в № 10. Здесь мы воспроизводим отрывок из его книги «Полупроводники и их применение» (М.—Л., издательство АН СССР, 1956, издание 2-е).

тов, изготовленных из металлических проволок, не превышает 0,5%. Такие термоэлементы применяются только для измерения температур и совершенно непригодны как технические генераторы электроэнергии.

В полупроводниках соотношение между развиваемой термоэлементом электроэнергией и теплотой, теряемой путем теплопроводности и выделяемой внутри термоэлемента током, гораздо благоприятнее. Полупроводники позволяют реально поставить проблему непосредственного получения электроэнергии из тепловой энергии.

В металлах при всех температурах, начиная с абсолютного нуля, все валентные электроны одинаково свободны, а их кинетическая энергия почти не зависит от температуры. Поэтому разность температур на концах металлического проводника вызывает лишь слабое перемещение зарядов и создает малые термоэлектродвижущие силы — менее 10^{-5} вольта на каждый градус разности температур.

Другое дело — полупроводник. Свободные заряды создаются в нем тепловым движением. При абсолютном нуле концентрация таких зарядов равна нулю, и полупроводник превращается в изолятор. С повышением температуры концентрация свободных электронов или дырок (их число в 1 см^3 — *прим. ред.*) чрезвычайно быстро возрастает, достигая при комнатных температурах 10^{15}—10^{20}. Кинетическая энергия свободного электрона в полупроводнике, в отличие от металла, не остается неизменной, а растет пропорционально абсолютной температуре. Поэтому в полупроводнике наличие разности температур вызывает перемещение свободных зарядов.

Если носителями тока являются электроны, то они переносят свой заряд в холодный конец, заряжая его отрицательным электричеством, тогда как горячий конец полупроводника, потерявший часть своих электронов, окажется заряженным положительно, что создаст между горячим и холодным концами разность потенциалов (рис. 1, *а*). В полупроводниках же с дырочным механизмом тока горячий конец окажется заряженным отрицательно, а холодный — положительно (рис. 1, *б*).

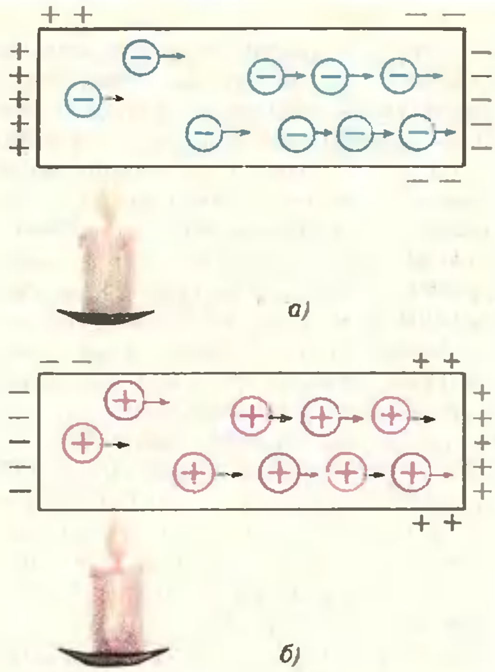


Рис. 1.

Если полупроводник изолирован, то по мере роста разности потенциалов внутри полупроводника нарастает электрическое поле, замедляющее поток электронов от горячего конца к холодному и ускоряющее поток в обратном направлении. Через некоторое время между горячим и холодным концами установится такая разность потенциалов, при которой потоки в обоих направлениях сравняются; это равновесие и определит термоэлектродвижущую силу. Она в десятки раз больше, чем в металлах, достигая или даже превышая 10^{-3} вольта на один градус разности температур.

Если полупроводник, в котором существует разность температур, составляет часть замкнутой электрической цепи, то поток зарядов, не прекращаясь, создает ток в цепи и выделяет электрическую энергию. Особенно выгодно устройство, в котором цепь составлена из дырочного и электронного полупроводников: их токи совпадают по направлению и усиливают друг друга.

Количественное различие между полупроводником и металлом приводит к новым качественным возможностям. Коэффициент полезного действия полупроводниковых термоэлементов доходит до 7%, но может быть и больше. Среди находящихся в обращении тепловых машин только двигатели внутреннего сгорания, требующие высококачественного жидкого топлива — бензина, керосина, нефти, обладают коэффициентом полезного действия порядка 40—50%. Коэффициент полезного действия лучших паровых электростанций едва достигает 30%, а паровых машин малой мощности — 10%. Учитывая крайнюю простоту термоэлектрических генераторов электроэнергии, не требующих ни сложных вращающихся механизмов тепловых машин, ни динамомашины, а также учитывая малые размеры и устойчивую работу термоэлементов, можно ожидать, что полупроводниковые термобатареи займут немаловажное место в энергетике народного хозяйства. Возможно, что термоэлементы откроют также путь к использованию новых источников тепла везде, где имеются значительные разности температур. Вероятно, можно будет с помощью термоэлектрических батарей превращать в электроэнергию энергию солнечных лучей.

Первое практическое применение термоэлементов осуществлено в Советском Союзе в целях радиофикации районов, не имеющих электроэнергии. Источником тепла здесь служат горячие газы, выходящие из стекла керосиновой лампы; они проходят внутри вертикальной трубки, помещенной над стеклом, и подогревают внутренние спаи термоэлементов, расположенных по радиусам трубки. Наружные спаи охлаждаются комнатным воздухом; для усиления охлаждения эти спаи соединены с металлическими пластинами радиатора. В таком устройстве внутренние спаи нагреты до 300—350°С, тогда как температура наружных спаев не превышает 60°С. Разности температур в 250—300°С, поддерживаемой теплом, доставляемым керосиновой лампой, оказывается достаточно для создания электроэнергии, необходимой для питания радиоприемника.

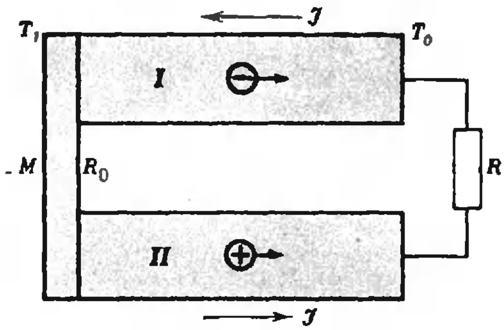


Рис. 2.

Рассмотрим устройство полупроводникового термоэлемента. Он состоит из двух соединенных металлическим проводом полупроводниковых ветвей, из которых одна изготовлена из электронного, а другая из дырочного полупроводников (рис. 2). Соединяющий их металлический мостик M подогревается источником тепла. Два других конца, охлаждаемые воздухом или проточной водой, присоединены к внешней цепи, использующей создаваемую термоэлементом электроэнергию. Такой внешней цепью в описанном случае являлся радиоприемник; в других случаях это может быть лампа накаливания или флюоресцентная лампа, если задачей является освещение; электромотор, если нужна механическая энергия, и т. п. Рисунок 2 поясняет сказанное. В нем I и II обозначают две ветви термоэлемента, состоящие из полупроводниковых стержней, R — электрическое сопротивление того или другого приемника электроэнергии. Положим, что ветвь I представлена электронным, а ветвь II — дырочным полупроводниками. Тогда электрическое поле, а следовательно, и электрический ток будут направлены так, как указывают стрелки: в ветви II от горячего конца к холодному, а в ветви I — от холодного к горячему, складываясь, таким образом, в направлении движения против часовой стрелки.

Обозначим абсолютную температуру горячих концов термоэлемента через T_1, а холодных через T_0. Если α_I и α_{II} обозначают термоэлектродвижущие силы, возникающие в ветвях I и II при разности температур между концами в 1° С, то общая электродвижущая сила $\mathscr{E}$, соответствующая разности температур $T_I - T_0$, составит

$$\mathscr{E} = (\alpha_I + \alpha_{II})(T_I - T_0).$$

Ток I, который появится в замкнутой цепи, состоящей из внутреннего сопротивления R_0 ветвей термоэлемента и внешнего сопротивления R_0 приемника, будет равен

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R + R_0}.$$

Полезная мощность P, которую мы получаем в приемнике, может быть выражена как

$$P = UI,$$

где U — разность потенциалов на концах внешнего сопротивления R. Так как потенциал падает в цепи постоянного тока, с которым мы здесь и имеем дело, пропорционально сопротивлению, то

$$\frac{U}{\mathscr{E}} = \frac{R}{R + R_0}, \quad U = \frac{\mathscr{E} R}{R + R_0},$$

а

$$P = \frac{\mathscr{E}^2 R}{(R + R_0)^2}.$$

Подставив вместо $\mathscr{E}$ его значение, мы получим общее выражение для полезной мощности P, доставляемой термоэлементом:

$$P = (\alpha_I + \alpha_{II})^2 (T_I - T_0)^2 \frac{R}{(R + R_0)^2}.$$

Наибольшего значения P достигает тогда, когда $R = R_0$ (докажите это самостоятельно — *прим. ред.*); наибольшая мощность, которую может создать термоэлемент во внешнем приемнике, равна

$$P_{max} = \frac{(\alpha_I + \alpha_{II})^2 (T_I - T_0)^2}{4R}.$$

Вся же развиваемая термоэлементом электрическая мощность будет

$$\mathscr{E} I = \frac{(\alpha_I + \alpha_{II})^2 (T_I - T_0)^2}{2R}.$$

Для того чтобы поддерживать разность температур, необходимо непрерывно сообщать тепловую энергию горячему спаю и отнимать тепло от холодных концов. Значительная часть подводимого тепла уходит путем теплопроводности обеих ветвей к холодным концам. Часть создаваемой термоэлементом электроэнергии бесполезно расходуется на нагревание обеих ветвей. Эти необратимые процессы резко снижают коэффициент полезного действия термоэлемента. Если бы можно было их полностью избежать (а это неосуществимо, так как любой полупроводник обладает теплопроводностью и электрическим сопротивлением), то термоэлемент давал бы наивысший допустимый по законам термодинамики коэффициент полезного действия

$$\eta_{max} = \frac{T_I - T_0}{T_I}.$$

В примере термобатареи для радиоприемника можно принять $T_I = (350 + 273)\,К = 623\,К$ и $T_0 = (50 + 273)\,К = 323\,К$, откуда

$$\eta_{max} = \frac{623 - 323}{623} = 0{,}48 = 48\%.$$

В действительности же коэффициент полезного действия η термобатареи измеряется немногими процентами. Этот пример показывает, какую громадную роль играют процессы теплопроводности и выделения током джоулевой теплоты.

Если мы заинтересованы в получении возможно большего коэффициента полезного действия η, а не максимальной мощности P, соотношение между внешним сопротивлением R и внутренним R_0 следует подобрать иначе: R должно быть больше R_0. В этом случае из всей развиваемой термоэлементом мощности $\mathscr{E} I$ используется более половины мощности P.

Анализ явлений в термоэлементе показывает, что резкое снижение коэффициента полезного действия η во много раз по сравнению с термодинамически возможным значением η_{max} вызвано в основном необратимым процессом теплопроводности. Обратимся поэтому к вопросу о механизме передачи тепла внутри полупроводника. Выравнивание температуры происходит здесь одновременно двумя путями — в результате: 1) переноса тепла электронами и 2) передачи тепла движением атомов. Электроны, обладающие в горячем конце более высокой кинетической энергией, переходят к холодному концу, где они отдают избыток энергии атомам, усиливая их тепловое движение и повышая температуру. Находившиеся у холодного конца электроны с меньшей кинетической энергией, переходя к горячему концу, ослабляют тепловое движение и понижают температуру. Так как те же электроны переносят и электрический ток в полупроводнике, то между переносом ими тепла и тока существует близкая связь.

Теплопроводность материала характеризуется некоторым коэффициентом $\varkappa$, который можно определить следующим образом. Если мы возьмем цилиндрический стержень из данного вещества с единичным поперечным сечением, в котором на каждую единицу длины температура изменяется на один градус, то за единицу времени в направлении от горячего к холодному концу переносится количество теплоты, равное $\varkappa$.

Если же площадь поперечного сечения стержня равна S, его длина L, разность температур на его концах ΔT, то за время t путем теплопроводности перейдет от горячего к холодному концу количество теплоты

$$Q=\varkappa\frac{\Delta T}{L}\,St.$$

С другой стороны, вызванный теми же электронами электрический ток в данном веществе определяется его удельной электропроводностью σ. В таком же стержне длиной L и поперечным сечением S при разности потенциалов ΔU между его концами за время t пройдет количество электричества

$$q=\sigma\frac{\Delta U}{L}\,St.$$

Связь между теплопроводностью $\varkappa$ и электропроводностью σ для различных металлов была чисто эмпирически установлена Видеманом и Францем. А именно: опыт показал, что

$$\frac{\varkappa}{\sigma}=A_{м}T,$$

где T — абсолютная температура и $A_{м}$ — одинаковый для всех металлов множитель. Квантовая теория полупроводника также приводит к соотношению $\frac{\varkappa}{\sigma}=A_{п}T$, но коэффициент $A_{п}$ имеет другое значение.

Такое соотношение между $\varkappa$ и σ делает принципиально невозможным осуществление обратимого термоэлемента. Для устранения теплопроводности нужно, чтобы $\varkappa=0$; для устранения джоулевой теплоты нужно, чтобы удельное сопротивление ветвей термоэлемента равнялось нулю, а обратная величина $\varkappa$ — бесконечности. Но требование, чтобы одновременно было $\varkappa=0$, а $\sigma\to\infty$, несовместимо с законом Видемана—Франца.

Перейдем к рассмотрению второго вида теплопроводности. Кроме переноса тепла электронами, теплопроводность в полупроводниках осуществляется и тепловым движением атомов кристаллической решетки. Механизм этого процесса можно представить себе следующим образом. Хаотическое тепловое движение атомов твердого тела можно рассматривать как совокупность самых разнообразных их колебаний. Сюда входят и колебания отдельных атомов одного по отношению к другому, и колебания их попарно, по три и т. д., вплоть до колебаний всего тела как целого. Чем выше температура, тем интенсивнее колебания. Каждое из этих многочисленных колебаний распространяется в теле в виде упругих волн, перенося свою энергию.

Коэффициент теплопроводности $\varkappa$ полупроводника складывается, таким образом, из двух частей: из теплопроводности $\varkappa_{эл}$, обязанной электронам, и теплопроводности $\varkappa_{ф}$, создаваемой тепловым движением атомов тела. Величина $\varkappa_{эл}$ пропорциональна удельной электропроводности σ. Поэтому с изменением концентрации свободных электронов в полупроводнике коэффициент $\varkappa_{эл}$ изменяется пропорционально σ, тогда как $\varkappa_{ф}$ остается почти неизменным. Общая теплопроводность $\varkappa$ может быть выражена как

$$\varkappa=A_{п}T\sigma+\varkappa_{ф}.$$

Наши опыты действительно подтвердили такую зависимость $\varkappa$ от σ.

Коэффициенты теплопроводности $\varkappa_{I}$ и $\varkappa_{II}$ ветвей термоэлемента играют важную роль в определении его коэффициента полезного действия; наряду с этим, существенное значение имеют термоэлектродвижущие силы α_{I} и α_{II} и удельные сопротивления ϱ_{I} и ϱ_{II} обеих ветвей. Как показывают вычисления, при данных температурах T_1 горячего и T_0 холодного концов коэффициент полезного действия термоэлемента определяется одной величиной z, зависящей от перечисленных характеристик материалов термоэлемента:

$$z=\frac{(\alpha_{I}+\alpha_{II})^2}{(\sqrt{\varkappa_1\varrho_1}+\sqrt{\varkappa_2\varrho_2})^2}.$$

Чем больше z, тем выше коэффициент полезного действия; при данном же значении z он всегда один и тот же, каковы бы ни были значения величин α, $\varkappa$ и ϱ в отдельности. Расчет показывает также, что коэффициент полезного действия не зависит от размеров и формы ветвей термоэлемента, а зависит только от T_1, T_0 и z. Коэффициент полезного действия термоэлемента может быть выражен следующим образом:

$$\eta=\frac{T_1-T_0}{T_1}\quad\frac{\sqrt{1+\frac{1}{2}(T_1+T_0)z}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}(T_1+T_0)z}+\frac{T_0}{T_1}}.$$

Для металлов z имеет значения порядка нескольких единиц, умноженных на 10^{-5}, для полупроводников 10^{-3} и выше, то есть в несколько десятков раз больше. Соответственно с такими значениями z, и коэффициент полезного действия полупроводниковых термоэлементов в десятки раз превосходит таковой металлических термоэлементов.

Из термоэлементов составляются термоэлектрические батареи. Если нужно получить значительные напряжения, приходится соединять последовательно большое число термоэлементов. Так, при термоэлектродвижущей силе $\alpha_{I}+\alpha_{II}=4\cdot10^{-4}$ В/°С и разности температур $T_1-T_0=30°$ С электродвижущая сила одного элемента $\mathscr{E}=0{,}12$ В. Для того чтобы создать электродвижущую силу в 120 вольт, нужно включить последовательно 1000 таких элементов. Если ставится требование получения сильных токов, элементы соединяются параллельно.

Чем больше тепла поступает через каждый квадратный сантиметр горячего спая, тем меньше размеры термобатареи, выделяющей данную электроэнергию. Эти соображения определяют выбор той или иной конструкции термобатареи. Коэффициент полезного действия термобатареи не зависит ни от способа соединения элементов, ни от ее формы.

Холодильники

Вскоре после открытия Зеебека Пельтье в 1834 году наблюдал явление, которое оказалось тесно связанным с термоэлектричеством (чего, впрочем, сам Пельтье не подозревал). Пельтье хотел доказать, что нагревание проводников слабыми токами не подчиняется общему для всех проводников закону Джоуля — Ленца и обнаруживает индивидуальные особенности в разных металлах. С этой целью он составлял цепи из разных металлов. Хотя измерения теплоты, выделяемой в них током, не оправдали ожиданий Пельтье, но зато он подметил на границах двух разных металлов своеобразные тепловые эффекты, которые и описал. Петербургский академик Ленц показал в 1838 году изящным опытом, что на границе различных проводников электрический ток либо выделяет, либо поглощает определенное количество тепла. Поместив на стыке двух металлов каплю воды, Ленц заморозил ее пропусканием тока.

Теперь мы знаем, что количество теплоты Q, выделяемой или поглощаемой на границе двух проводников, пропорционально силе тока I и абсолютной температуре T стыка проводников:

$$Q=AIT.$$

Коэффициент A совпадает с суммой термоэлектродвижущих сил $\alpha_{I}+\alpha_{II}$ ветвей термоэлемента. Знак величины Q (то есть получение или потеря тепла в стыке) зависит от знака I, то есть от направления тока.

Рассмотренный нами ранее ток, возникающий в замкнутой цепи термоэлемента, охлаждает горячий спай и, наоборот, подогревает холодный спай, выделяя здесь теплоту. Если, пользуясь внешним источником, пропустить через термоэлемент ток обратного направления, то он будет выделять тепло на горячем спае и отнимать тепло от холодного. Один и тот же спай двух проводников при одном направлении тока нагревается, при другом — охлаждается.

Расчет показывает, что разность температур, которую можно таким образом создать, а также количество тепла, которое ток отнимает от охлаждаемого им спая и сообщает нагреваемому, определяется той же величиной z, что и коэффициент полезного действия термоэлемента.

Те же свойства материала обеих ветвей, определяемые величинами α, $\varkappa$ и ϱ, характеризуют производство электроэнергии в термоэлектрическом генераторе и холодопроизводительность в холодильнике.

Поддерживая температуру нагреваемого спая близкой к комнатной и непрерывно отводя от него выделяемую здесь теплоту в окружающую среду, можно значительно охладить другой спай и через его посредство — окружающий воздух. Таким образом, с помощью полупроводников, характеризуемых достаточной величиной z, можно получить в холодильном шкафу необходимые низкие температуры. На этом принципе могут быть осуществлены домашние холодильники.

С другой стороны, можно воспользоваться явлением Пельтье и для подогрева помещения, например для отопления зданий или для подогрева пищи. Подобные задачи давно решаются более простым способом — выделением джоулевой теплоты в реостате или нагревательной плитке. Количество выделяемой в этом случае тепловой энергии равно количеству затраченной электроэнергии.

Термоэлектрический же обогрев помещения существенно отличается от действия нагревательной плитки. Пропуская электрический ток через термоэлектрическую цепь, мы, помимо обычного нагрева всего проводника, охлаждаем один спай и нагреваем другой. От охлаждаемого спая отнимается некоторое количество тепловой энергии Q_0, которое может быть выражено так:

$$Q_0 = \alpha T_0 I t,$$

где α — термоэлектродвижущая сила, T_0 — абсолютная температура холодного спая, I — сила тока и t — длительность прохождения тока. Соответственно в теплом спае, абсолютную температуру которого обозначим через T_1, выделяется тепловая энергия

$$Q_1 = \alpha T_1 I t,$$

которая больше теплоты Q_0 в отношении

$$\frac{Q_1}{Q_0} = \frac{T_1}{T_0}.$$

Если мы ограничимся рассмотрением процессов на обоих спаях, то их можно описать следующим образом. Электрический ток отнимает от холодного спая теплоту Q_0 и передает теплому спаю большее количество тепла Q_1, добавляя недостающую энергию $Q_1 - Q_0$ в виде электрической энергии W. К теплоте Q_0, отнимаемой от холодного спая, добавляется энергия W, и сумма их $Q_0 + W = Q_1$ выделяется на теплом спае.

Из приведенных данных о величинах Q_0 и Q_1 видно, что отношение затрачиваемой электроэнергии W к теплоте Q_1, которая освобождается на теплом спае, равно

$$\frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_0}{Q_1} = \frac{T_1 - T_0}{T_1}.$$

Если, например, абсолютная температура теплого спая $T_1 = 300$ K, что соответствует $+27°$ C, а температура $T_0 = 270$ K, или $-3°$ C, то

$$\frac{W}{Q_1} = \frac{30}{300} = 0{,}1.$$

Другими словами, для того чтобы передать в теплое помещение при температуре 27° C 100 калорий тепла (1 кал $= 4{,}18$ Дж — *прим. ред.*), можно было бы использовать 90 калорий, взятых от холодной среды (например, от внешнего воздуха), и добавить всего 10 калорий электроэнергии. Поскольку отнятие 90 калорий от внешнего холодного воздуха или водного резервуара легко доступно, возникает заманчивая возможность, затрачивая всего 10 калорий электроэнергии, сообщить более теплому помещению 100 калорий тепла.

К сожалению, действительный процесс в термоэлектрической батарее не ограничивается выделением и поглощением тепла на спаях. Вдоль ветвей самой термобатареи возникает поток тепла от теплого спая к холодному, который противодействует переносу тепла в обратном направлении, сопровождающему прохождение тока. Кроме того, часть электрической энергии тока превращается в тепло в обеих ветвях термоэлемента.

В результате наличия этих двух процессов использование электроэнергии резко снижается: приходится добавлять не 10% электроэнергии, а около 60%. Но и такой результат представляет значительный интерес: затрата электроэнергии составляет только около половины теплоты, поступающей в помещение, остальная половина доставляется более холодным наружным воздухом или проточной водой. Чем меньше разность T_1-T_0 по сравнению с T_1, тем выгоднее окажется термоэлектрическая батарея по сравнению с электрической печью сопротивления.

Термоэлектрическая батарея обладает и другим важным преимуществом. Если изменить направление тока на противоположное, то на наружных спаях начнет выделяться теплота Q_0, а нагревавшие помещение спаи будут отнимать теплоту Q_1, охлаждая помещение. В жаркое время года та же термобатарея может охлаждать воздух. Регулируя силу и направление тока в батарее, можно поддерживать в помещении одну и ту же температуру при любых температурах внешнего воздуха.

Охлаждение, вызываемое термоэлектрической батареей, можно, как мы уже упоминали, использовать для осуществления холодильника. Теплые спаи отдают получаемую ими теплоту Q_1 в окружающий воздух или в водопроводную воду, холодные же спаи, находящиеся внутри холодильного шкафа, отнимают теплоту, поддерживая в нем желательную низкую температуру.

В современной технике имеются различные типы холодильных машин. Чем меньше в них необратимых процессов, тем такие машины выгоднее, тем ближе их коэффициент полезного действия к термодинамическому. Существуют сложные холодильные машины с бо́льшим коэффициентом полезного действия, чем термоэлектрические, но последние обладают преимуществом простоты и отсутствия движущихся механизмов.

В коллекцию филателистов

В нашей стране неоднократно выпускались почтовые марки, посвященные выдающимся советским физикам и математикам — президенту Академии наук СССР академику С. И. Вавилову, академикам И. В. Курчатову, Л. А. Арцимовичу, М. Д. Миллионщикову, И. Г. Петровскому, А. Н. Крылову. В конце 1980 года эта коллекция пополнилась маркой с изображением выдающегося советского физика академика А. Ф. Иоффе. Она выпущена в связи с юбилеем — столетием со дня его рождения.

В. Рудов

А. Раухман

Группоиды

В алгебре, которая начиналась как наука о решении уравнений еще в средневековье («Квант», 1976, № 9, с. 2 и 1976, № 5, с. 3, 6), в XIX веке произошли сильные изменения, особенно ярко проявившиеся в работах французского математика Э. Галуа («Квант», 1973, № 10). В наше время алгебра — в первую очередь, наука об абстрактных операциях или, по выражению Н. Бурбаки («Квант», 1978, № 6, с. 32), наука об «алгебраических структурах». В этой статье предлагается исследовать элементарными средствами простейшую такую структуру — структуру группоида.

Алгебраические операции

Говорят, что на непустом множестве M определена (*бинарная*) *алгебраическая операция*, если задано правило, с помощью которого каждой упорядоченной паре элементов a и b этого множества ставится в соответствие определенный элемент c этого же множества.

Обычные операции сложения и умножения действительных чисел, конечно же, являются алгебраическими операциями. Но важно сразу понять, что совсем не обязательно рассматривать только операции над числами: множество M может состоять из элементов самой разнообразной природы — из многочленов, функций, перемещений, букв и даже слов.

Как правило, мы в дальнейшем будем обозначать алгебраические операции звездочкой $*$. Запись $c=a*b$ означает, что элемент $c \in M$ является результатом применения операции $*$ к паре $(a; b)$. Множество M с определенной на нем алгебраической операцией называется *группоидом* и обозначается $(M; *)$.

Задача 1. *Проверьте, что* $(\mathbf{N}; \cdot)$, $(\mathbf{N}; +)$, $(\mathbf{Z}; -)$, $(\mathbf{R}_0; :)$, *где* $\mathbf{R}_0$ *— множество ненулевых действительных чисел, являются группоидами, а* $(\mathbf{N}; -)$, $(\mathbf{Z}; :)$ *— нет. Приведите еще десяток группоидов из школьной математики.*

Свойства группоидов

Когда речь идет об обычных операциях сложения и умножения, вы умеете, не думая, пользоваться их основными свойствами. В этом таится определенная опасность: когда переходишь к произвольной операции, не все эти свойства справедливы, нельзя ими пользоваться «по аналогии». Рассмотрим, например, такие свойства сложения:

$$x+z=y+z \Rightarrow x=y \quad (1)$$

$$x+y=y+x \quad (2)$$

$$x=y \Rightarrow x+z=y+z \quad (3)$$

$$x+y=z \Rightarrow x=z-y \quad (4)$$

$$x+x=2x \quad (5)$$

Какие из этих свойств верны, если вместо операции $+$ в них взять произвольную алгебраическую операцию $*$?

Как мы увидим ниже, утверждения (1) и (2) верны далеко не всегда. Однако утверждение (3) всегда верно (постарайтесь сообразить, почему)! Об утверждении (4) нельзя говорить, верно оно или не верно,— оно не понятно, так как знак «минус» не определен для произвольной операции $*$. Аналогично обстоит дело с утверждением (5): выражение $2x$ (где x — элемент произвольного множества M) пока не определено.

Таким образом, прежде всего нужно разобраться в основных свойствах группоидов. Таких свойств много, мы ограничимся пятью наиболее важными.

Свойство К. Группоид $(M; *)$ называется *коммутативным*, если для любых $a, b \in M$

$$a*b=b*a.$$

Так, группоиды $(\mathbf{Z};\ +)$, $(\mathbf{R};\ \cdot)$ коммутативны, но $(\mathbf{R}_0;\ :)$, конечно же, нет: например, $8:4 \neq 4:8$!

Свойство А. Группоид $(M;*)$ называется *ассоциативным*, если для любых $a,\ b,\ c\ \in M$

$$(a*b)*c = a*(b*c).$$

По-видимому, все известные вам операции этим свойством обладают: примеры не ассоциативных группоидов появятся ниже (см. задачу 2).

Свойство Е. Элемент $e \in M$ называется *нейтральным* (говорят еще *единичным*, а для операции сложения — *нулевым*) в группоиде $(M;\ *)$, если для любого $a \in M$

$$a*e = e*a = a.$$

Мы будем говорить, что группоид $(M;\ *)$ обладает «свойством Е», если в нем есть нейтральный элемент. Выкладка $e = e*e' = e'$ показывает, что нейтральный элемент всегда единственный.

Для сложения чисел нейтральным элементом служит число 0, для умножения — число 1. А есть ли нейтральный элемент в группоиде всех перемещений плоскости (относительно операции композиции перемещений)? Конечно же, есть — тождественное преобразование.

Свойство И. Пусть $(M;\ *)$ — группоид с нейтральным элементом e. Тогда $(M;\ *)$ обладает свойством *инверсности* (говорят еще *обратимости*), если для любого $a \in M$ можно указать *обратный элемент*, то есть такой элемент $\bar{a} \in M$, что

$$a*\bar{a} = \bar{a}*a = e.$$

Для умножения чисел, например, обратным для элемента $a \neq 0$ служит элемент $1/a$, а при сложении — элемент $(-a)$. А вот для группоида $(\mathbf{N};\ +)$ *сложения натуральных чисел* уже нет свойства инверсности (почему?)

Свойство С. Группоид $(M;\ *)$ обладает свойством *сократимости*, если для любых $a,\ b,\ c \in M$

$$a*b = a*c \Rightarrow b = c$$
$$b*a = c*a \Rightarrow b = c.$$

Вам, наверное, пока трудно себе представить группоид, в котором эти правила не действуют. Но такие примеры вы сейчас увидите!

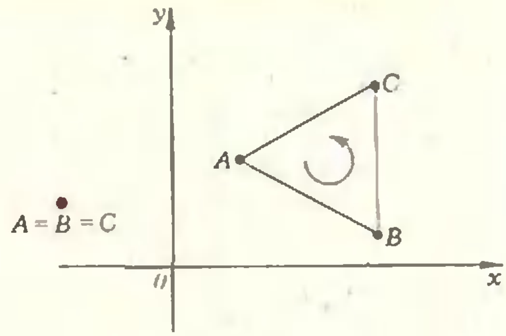


Рис. 1.

Задача 2. *Исследуйте, какими из свойств* К, А, Е, И, С *обладают следующие группоиды:*

а. $(\mathbf{R};\ *)$, *где для любых* $x,\ y \in \mathbf{R}$ $x*y = \max(x,\ y)$ ($\max(x,\ y)$ — наибольшее из чисел $x,\ y$).

б. $(\mathbf{N};\ *)$, *где* $x*y = \text{НОК}\ (x,\ y)$ (НОК — *наименьшее общее кратное*).

в. $(\mathbf{R}^2;\ *)$, *где* $\mathbf{R}^2$ — *координатная плоскость и для произвольной пары точек* $(a;\ b)$ *и* $(c;\ d)$

$$(a;\ b) * (c;\ d) = (ac;\ bc + d).$$

Задача 3. *Пусть* $\mathbf{\Pi}$ — *множество точек плоскости. Определим на этом множестве алгебраическую операцию* $*$ *следующим образом: Пусть* $A,\ B \in \mathbf{\Pi}$; *если* $A = B$, *то считаем, что* $A*A = A$; *если* $A \neq B$, *положим* $A*B = C$, *где* C — *третья вершина правильного положительно ориентированного**) *треугольника* ABC *(рис. 1). Исследуйте свойства группоида* $(\mathbf{\Pi},\ *)$.

Какие группоиды невозможны?

Составим таблицу всех мыслимых сочетаний пяти рассмотренных свойств. Этим выделяются различные типы группоидов $(M;\ *)$. Каждый такой тип мы охарактеризуем пятеркой букв вида К $\bar{\text{А}}$ Е $\bar{\text{И}}$ С. В этой записи буква К означает, что группоид обладает свойством коммутативности, буква $\bar{\text{А}}$ — что свойство

*) Треугольник ABC называется *положительно ориентированным*, если обход вершин в порядке $A \to B \to C$ осуществляется против часовой стрелки.

ассоциативности не имеет места и т. д.

Мы получим всего 32 сочетания:

КАЕИС	$\overline{\text{К}}$АЕ$\overline{\text{И}}$С	$\overline{\text{К}}\overline{\text{А}}\overline{\text{Е}}$ИС	К$\overline{\text{А}}$Е$\overline{\text{И}}\overline{\text{С}}$
$\overline{\text{К}}$АЕИС	КАЕИ$\overline{\text{С}}$	$\overline{\text{К}}\overline{\text{А}}\overline{\text{Е}}\overline{\text{И}}$С	КА$\overline{\text{Е}}\overline{\text{И}}\overline{\text{С}}$
К$\overline{\text{А}}$ЕИС	К$\overline{\text{А}}\overline{\text{Е}}$ИС	$\overline{\text{К}}\overline{\text{А}}$ЕИ$\overline{\text{С}}$	$\overline{\text{К}}\overline{\text{А}}\overline{\text{Е}}\overline{\text{И}}$С
КАЕИС	К$\overline{\text{А}}\overline{\text{Е}}$ИС	$\overline{\text{К}}\overline{\text{А}}\overline{\text{Е}}\overline{\text{И}}$С	$\overline{\text{К}}\overline{\text{А}}\overline{\text{Е}}\overline{\text{И}}\overline{\text{С}}$
КА$\overline{\text{Е}}\overline{\text{И}}$С	КАЕИ$\overline{\text{С}}$	КА$\overline{\text{Е}}\overline{\text{И}}\overline{\text{С}}$	$\overline{\text{К}}\overline{\text{А}}\overline{\text{Е}}\overline{\text{И}}\overline{\text{С}}$
КАЕИС	К$\overline{\text{А}}\overline{\text{Е}}\overline{\text{И}}$С	$\overline{\text{К}}\overline{\text{А}}$Е$\overline{\text{И}}\overline{\text{С}}$	$\overline{\text{К}}\overline{\text{А}}\overline{\text{Е}}\overline{\text{И}}\overline{\text{С}}$
$\overline{\text{К}}\overline{\text{А}}$ЕИС	КАЕИС	К$\overline{\text{А}}\overline{\text{Е}}\overline{\text{И}}$С	$\overline{\text{К}}\overline{\text{А}}\overline{\text{Е}}\overline{\text{И}}\overline{\text{С}}$
$\overline{\text{К}}\overline{\text{А}}\overline{\text{Е}}$ИС	КА$\overline{\text{Е}}\overline{\text{И}}\overline{\text{С}}$	$\overline{\text{К}}\overline{\text{А}}\overline{\text{Е}}\overline{\text{И}}\overline{\text{С}}$	$\overline{\text{К}}\overline{\text{А}}\overline{\text{Е}}\overline{\text{И}}\overline{\text{С}}$

Однако не все указанные здесь типы группоидов существуют. Давайте совместными усилиями докажем, что группоиды, тип которых напечатан красным шрифтом, на самом деле невозможны.

Проще всего решается вопрос с теми типами, в обозначении которых встречается сочетание $\overline{\text{Е}}$ И (таких типов всего 8). Противоречивость $\overline{\text{Е}}$ и И становится совершенно ясной из анализа формулировки свойства И.

Задача 4. *Докажите, что*

$$A\ E\ И \Rightarrow C,$$

то есть одновременное выполнение свойств А, Е и И влечет за собой выполнение свойства С.

Эта теорема исключает в нашей таблице еще два сочетания (какие?).

Какие группоиды существуют?

Итак, из 32 первоначально намеченных типов группоидов у нас осталось 22. Мы подошли теперь к основной задаче этой статьи:

Задача 5. *Докажите, что все группоиды, типы которых напечатаны черным шрифтом, существуют.*

Как доказать существование математического объекта? Проще всего — построить пример. В самом деле, если мы сможем привести конкретный пример группоида, обладающего, скажем, свойствами К А $\overline{\text{Е}}$ И $\overline{\text{С}}$, то этим самым докажем существование данного типа группоидов.

Следовательно, чтобы решить задачу 5, достаточно сделать такую задачу:

Второй множитель

*	a	b	c
a	b	c	a
b	c	c	b
c	a	b	a

Первый множитель

Рис. 2.

Задача 5′. *Построить примеры группоидов всех 22 типов, указанных черным в таблице.*

Наша задача распадается, таким образом, на 22 частные задачи. Хочется верить, что их число не испугает читателя. Так или иначе, читателю мы посоветуем сначала дочитать статью, а затем за них браться.

Отметим, что, решив задачу 5, мы одновременно ответим еще на один важный вопрос. Предположим, что нам удалось построить группоиды типов К А Е И С и К $\overline{\text{А}}$ Е И С. Существование таких группоидов означает, что свойство А является *логически независимым* от свойств К Е И С.

Задача 6. *Глядя на таблицу, установите, какие еще свойства независимы от остальных.*

Как найти группоид?

Задача 7. *Пусть* $M=\{a,\ b,\ c\}$, *а операция* $*$ *задана «таблицей умножения»* (рис. 2). *Каков тип группоида* $(M;\ *)$?

Задача 8. *Рассмотрим группоид* $(\mathbf{R};\ *)$, *где для любых* $x,\ y \in \mathbf{R}$

$$x*y=(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{2})^3.$$

Каков тип группоида?

Задачи 7 и 8 подсказывают два способа задания группоидов — *табличный* и *формульный*. Эти способы могут вам пригодиться при решении основной задачи 5′.

Конечные и бесконечные группоиды

Группоид $(M;\ *)$ называется *конечным* или *бесконечным* в зависимости от того, конечно или бесконечно множество M.

Задача 9. *Рассмотрим два группоида:*

1) $(M; *)$, *где* $M=\{e, a, b\}$, *а операция* $*$ *задана таблицей* (рис. 3);

2) $(\mathbf{N}_0; \Delta)$, *где* $\mathbf{N}_0$ — *множество целых неотрицательных чисел, причем для любых* $x, y \in \mathbf{N}_0$ $x\Delta y=|x-y|$.

Показите, что группоиды $(M; *)$, $(\mathbf{N}_0; \Delta)$ *относятся к одному и тому же типу (какому?).*

Как видим, для некоторых типов группоидов в качестве примеров можно привести и конечный, и бесконечный случаи.

Для других попытка придумать конечный группоид не приводит к успеху. Причина состоит в том, что в конечных группоидах появляются новые зависимости между свойствами операции $*$.

Задача 10. *Пусть* $(M, *)$ — *конечный группоид. Докажите, что*

К Е С ⇒ И.

Задача 11*. *Пусть* $(M, *)$ — *конечный группоид. Тогда*

А С ⇒ Е И.

*	e	a	b
e	e	a	b
a	a	a	e
b	b	e	b

Рис. 3.

Докажите это!

Утверждения задач 10 и 11 предохранят вас от безнадежных попыток придумать конечный группоид в тех случаях, когда он невозможен.

Ждем писем!

Если вам удастся найти примеры всех 22 типов, пришлите их нам. В случае, когда возможны конечный и бесконечный группоиды, хорошо найти и тот, и другой.

Геометрические доказательства теорем о средних

Возьмем полуокружность с центром O и пусть A — произвольная точка на продолжении ее диаметра BC, $[OD] \perp [BC]$, $[AE]$ — касательная и $[EF] \perp [BC]$ (см. рисунок). Положим $|AB|=a_1$ и $|AC|=a_2$ $(a_1 \neq a_2)$. Тогда

$$|AO|=\frac{a_1+a_2}{2},$$

$$|AE|=\sqrt{|AO|^2-|OE|^2}=\sqrt{a_1a_2},$$

$$|AD|=\sqrt{|AO|^2+|OD|^2}=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2}{2}},$$

$$|AF|=\frac{|AE|^2}{|AO|}=\frac{a_1a_2}{\frac{a_1+a_2}{2}}=\frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}},$$

то есть $|AO|$ — это *среднее арифметическое*, $|AE|$ — *среднее геометрическое*, $|AD|$ — *среднее квадратичное* и $|AF|$ — *среднее гармоническое* положительных чисел a_1 и a_2.

Поскольку $|AD|>|AO|$, $|AO|>|AE|$ и $|AE|>|AF|$, получаем такую цепочку неравенств:

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2}{2}}>\frac{a_1+a_2}{2}>\sqrt{a_1a_2}>\frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}}$$

(нетрудно видеть, что для $a_1=a_2$ эти неравенства превращаются в равенства)*).

Заметим еще, что среднее геометрическое двух положительных чисел является также средним геометрическим между их средним арифметическим и средним гармоническим:

$$a_{\text{ср.геом}}=\sqrt{a_{\text{ср.арифм.}}\cdot a_{\text{ср.гарм.}}}$$

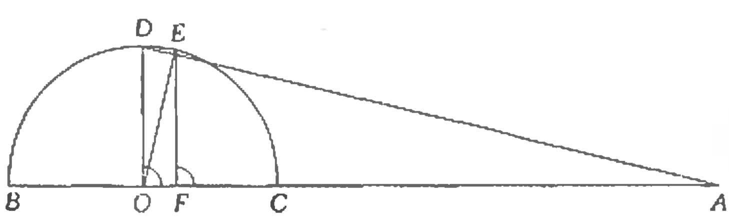
Это ясно аналитически:

$$\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}}=a_1a_2,$$

и геометрически:

$$|AE|=\sqrt{|AO|\cdot|AF|}.$$

А. Искендеров



*) Определения *средних* для случая n чисел, а также доказательства соответствующих неравенств см. в «Кванте», 1980, № 3, с. 22—23.

В. Майер,
Е. Мамаева

Псевдолинза Роберта Вуда

Может ли прозрачная плоскопараллельная пластинка давать изображения предметов, то есть действовать подобно собирающей линзе? Давайте рассуждать.

Как формируется изображение в собирающей линзе? От точечного источника света распространяется сферическая волна. В линзе центр волны проходит больший путь, чем края, поэтому он отстает от краев, а волна превращается в сходящуюся. Световые лучи, которые всегда нормальны волновым поверхностям, при этом поворачиваются так, что после выхода из линзы они пересекаются в одной точке. Эта точка и является действительным изображением источника.

В плоскопараллельной пластинке нормально падающие на нее лучи проходят одинаковые пути. Поэтому, на первый взгляд, кажется, что сделать из такой пластинки собирающую линзу нельзя. Впрочем, можно поступить по-другому. Вспомним, что скорость света в веществе зависит от его показателя преломления: чем больше показатель преломления, тем меньше скорость света. Следовательно, чтобы из плоскопараллельной пластинки получить собирающую линзу, достаточно сделать показатель преломления наибольшим в центре пластинки и постепенно уменьшающимся к ее краям.

В настоящее время линзы с переменным показателем преломления нашли применение в технике сантиметровых радиоволн. Для оптического диапазона электромагнитных волн изготовить подобную линзу, которая могла бы выдержать конкуренцию с обычной, довольно сложно. Однако выдающийся американский физик-экспериментатор Роберт Вуд предложил простую модель оптической линзы с переменным показателем преломления, которую он назвал псевдолинзой. Несколько измененный способ изготовления псевдолинзы, приводящий, на наш взгляд, к лучшим результатам, мы вам и рекомендуем.

Возьмите пробирку и насыпьте в нее фотографический или пищевой желатин так, чтобы образовался слой толщиной около 2 см. Налейте в пробирку до половины ее высоты воду и оставьте желатин на 2—3 часа набухать в воде. Затем слейте из пробирки избыток воды и, нагревая пробирку на пламени сухого горючего, полностью расплавьте набухший желатин. (Пробирку нагревайте осторожно, чтобы приготовляемый состав не подгорел.) После этого влейте в расплавленный желатин равное по объему количество глицерина.

Пока состав охлаждается, приготовьте две чистые пластинки размером примерно 20×20 мм и 40×40 мм из тонкого стекла (можно использовать стекло тщательно отмытой от эмульсии фотопластинки, оконное стекло или, в крайнем случае, оргстекло). Заготовьте также две полоски картона размером 4×25 мм и толщиной около 0,5 мм.

В охладившийся состав опустите стеклянную трубку и перенесите ею на расположенную горизонтально большую стеклянную пластинку немного состава. Постарайтесь добиться, чтобы образовавшаяся капля была совершенно круглой диаметром 6—10 мм. Если с первого раза вам не удастся получить то, что нужно, быстро вымойте в проточной воде стеклянную пластинку, насухо вытрите ее и проделайте все еще раз. Как только вы сумеете получить нужную каплю, положите рядом с каплей на пластинку картонные

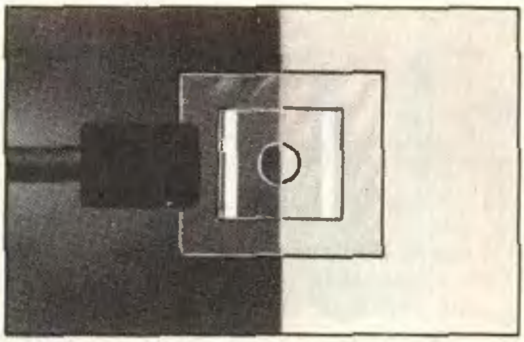


Рис. 1.

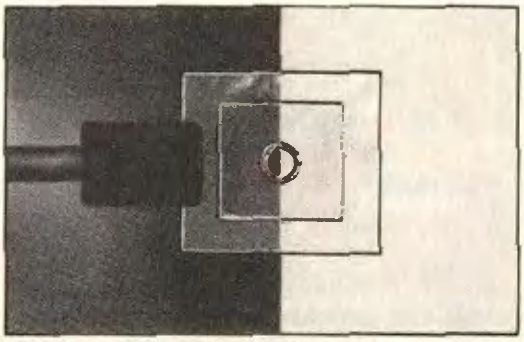


Рис. 2.

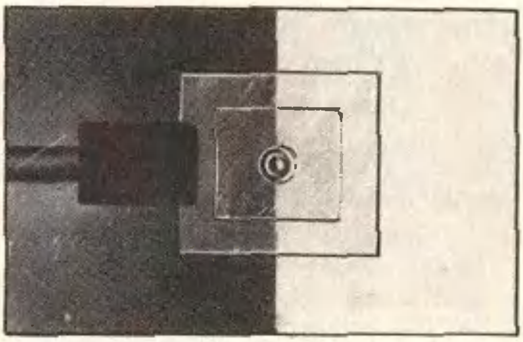


Рис. 3.

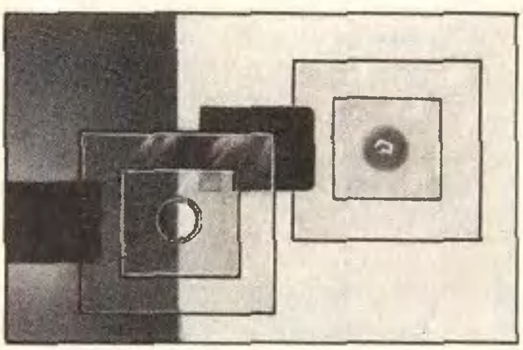


Рис. 4.

полоски и быстро накройте каплю второй стеклянной пластинкой.

Через 10—20 минут, когда состав окончательно загустеет, между стеклянными пластинками образуется небольшой цилиндрик, боковая стенка которого перпендикулярна основаниям (рис. 1). Посмотрите через плоскопараллельные основания цилиндрика на границу между темной и светлой областями или просто на какой-либо удаленный предмет — никакого преломления вы не обнаружите.

Вынув прокладки, опустите стеклянные пластинки с цилиндриком на дно блюдца с холодной прокипяченной или дистиллированной водой. Проследите, чтобы вода обязательно зашла в промежуток между пластинками. Воздушный пузырек, который почти неизбежно остается вблизи цилиндрика, аккуратно удалите полоской бумаги. Спустя 3—4 минуты достаньте пластинки из воды, осторожно протрите их тряпочкой, воду из промежутка между ними удалите фильтровальной бумагой. На стеклянных пластинках не должно оставаться капель воды, так как они, фокусируя свет, будут сильно мешать наблюдениям.

Вновь посмотрите сквозь цилиндрик на границу раздела между светлой и темной областями. Вы обнаружите, что цилиндрик своим внешним ободком начал преломлять свет. Опустив цилиндрик в воду еще на 5—15 минут, добейтесь того, чтобы вода проникла вплоть до оси цилиндрика. На рисунках 2 и 3 приведены фотографии, ясно показывающие, что́ вы должны наблюдать.

Итак, псевдолинза готова. Достав ее из воды и высушив стеклянные пластинки тряпочкой и фильтровальной бумагой, вы сможете получить с ее помощью удивительно четкие изображения, например изображение спирали настольной лампы (рис. 4). Последняя фотография получена в следующих условиях: расстояние от лампы до псевдолинзы (которая имела диаметр 9 мм) $d=75$ см, расстояние от псевдолинзы до изображения $f=26$ см.

(Окончание см. на с. 21)

М. Апресян

Бесконечные суммы и... прямоугольник

Старшеклассники знают, что при $|q|<1$ сумма бесконечной геометрической прогрессии $1+q+q^2+q^3+\dots$ равна $\frac{1}{1-q}$, и умеют это доказывать аналитически (см. пособие «Алгебра и начала анализа 9», п. 24). Для $q=\frac{1}{n}$, где $n\in\mathbf{N}$, существует простой геометрический способ нахождения этой суммы.

Начнем с $n=2$: найдем сумму

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$$

Возьмем произвольный прямоугольник площади 2. Разрежем его на два *равновеликих* (одинаковой площади) прямоугольника единичной площади так, как показано на рисунке 1. Один из этих прямоугольников снова разрежем на две равновеликие части: получим прямоугольнички площади $\frac{1}{2}$. С одним из них снова поступим так же — получим два прямоугольничка площади $\frac{1}{4}$. Продолжая этот процесс, мы получим прямоугольнички площади $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$ Объединение этих прямоугольников дает исходный прямоугольник (без одной угловой точки). Поэтому сумма площадей прямоугольников равна площади исходного прямоугольника, то есть двум. Таким образом, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots=2$.

Найдем теперь сумму $1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\dots$ Для этого возьмем уже прямоугольник площади n и разрежем его на n прямоугольников единичной площади (рис. 2). Один из этих прямоугольников снова разрежем на n равновеликих прямоугольничков площади $\frac{1}{n}$. С одним из них снова проделаем ту же операцию; получим n прямоугольничков площади $\frac{1}{n^2}$. Продолжая этот процесс, мы получим теперь по $n-1$ прямоугольничков площади $1, \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \dots, \frac{1}{n^k}, \dots$ В объединении они составляют исходный прямоугольник (опять без одной угловой точки). Поэтому искомая площадь равна $\frac{n}{n-1}$.

Та же идея годится и для нахождения суммы бесконечной геометрической прогрессии с рациональным знаменателем $0<q<1$. В самом деле, используя прямоугольник площади n и рассуждая аналогично, можно доказать, что сумма $1+\frac{m}{n}+\frac{m^2}{n^2}+\frac{m^3}{n^3}+\dots(m<n,\ m$ и

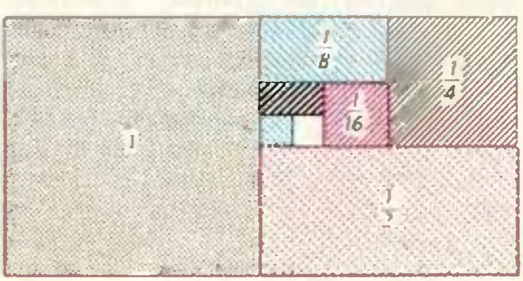


Рис. 1.

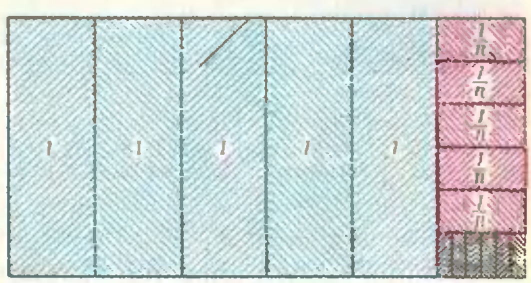


Рис. 2.

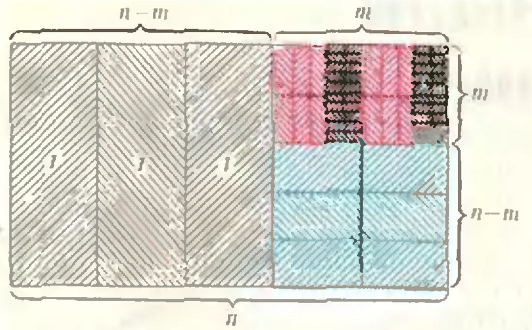


Рис. 3.

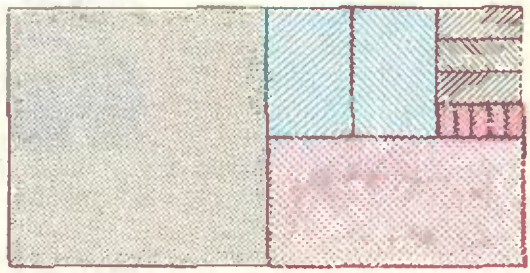


Рис. 4.

n — натуральные числа) равна $\frac{n}{m-n}$: для этого нужно оставить без изменения $n-m$ единичных прямоугольничков, а каждый из m прямоугольничков площади 1 снова разрезать на n равновеликих частей (рис. 3). Затем оставить без изменения $n-m$ полос, площади $\frac{m}{n}$ каждая, а каждый из m^2 прямоугольничков площади $\frac{1}{n}$ снова разрезать на n равновеликих частей. Вы уже догадались, что нужно делать дальше? Доведите это построение до «конца» и обоснуйте его.

В заключение мы с помощью прямоугольника площади 2 вычислим еще одну бесконечную сумму; именно, мы докажем, что

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{n+1!}+\ldots=2.$$

Первые два шага будут такие же, как раньше: разрежем прямоугольник на два прямоугольника площади 1; один из них — на два прямоугольничка площади $\frac{1}{2}$ (рис. 4). А затем один из этих прямоугольничков разрежем уже на т р и равновеликие части (площади $\frac{1}{6}$ каждая). Одну из частей площади $\frac{1}{6}$ разрежем на ч е т ы р е равновеликие части; одну из них — на п я т ь частей и т. д. Продолжая этот процесс до бесконечности, мы получим в результате один прямоугольничек площади 1, один — площади $\frac{1}{2!}$, два прямоугольничка площади $\frac{1}{3!}$, три — площади $\frac{1}{4!}$, ..., n прямоугольничков площади $\frac{1}{(n+1)!}$ и т. д. Значит, искомая сумма равна площади исходного прямоугольника, то есть двум.

Псевдолинза Роберта Вуда

(Начало см. на с. 18)

Отсюда, согласно формуле $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$, можно найти фокусное расстояние псевдолинзы: $F=19{,}5$ см. Псевдолинзы диаметром около 6 мм имеют фокусное расстояние порядка 10 см.

Каков принцип действия псевдолинзы? Показатель преломления глицерина $n_г=1{,}47$; а показатель преломления воды $n_в=1{,}33$. Вода, диффундируя в однородный цилиндрик, состоящий из желатина и глицерина, вытесняет из него глицерин. Цилиндрик при этом становится неоднородным, причем его показатель преломления постепенно уменьшается от центра к краям. А такая система, как уже говорилось, ведет себя как собирающая линза.

Заметим, что примерно через сутки состав вновь становится однородным, и псевдолинза теряет свои удивительные свойства.

задачник Кванта

Задачи

М666—М670; Ф678—Ф682

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 апреля 1981 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 2 — 81» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М666, М667» или «Ф678». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

М666. Докажите, что наименьшее общее кратное n натуральных чисел $a_1<a_2<\ldots<a_n$ не меньше na_1.

А. Разборов

М667. Постройте треугольник ABC, если заданы его наименьший угол $\widehat{A}$ и отрезки длины $d=|AB|-|BC|$ и $e=|AC|-|BC|$.

Н. Васильев

М668*. Последовательность (x_i) определяется условиями

$$x_1=1,\ x_2=0,\ x_3=2,\ x_{n+1}=x_{n-2}+2x_{n-1}.$$

Докажите, что для любого натурального m найдутся два соседних члена этой последовательности, каждый из которых делится на m.

Г. Козлов

М669. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Докажите, что

а) отрезок, соединяющий середины дуг AB и CD, перпендикулярен отрезку, соединяющему середины дуг BC и AD;

б) центры окружностей, вписанных в треугольники ABC, BCD, CDA и DAB, являются вершинами прямоугольника.

К. Малхасян, И. Герман

М670*. а) Дано несколько точек, некоторые пары которых соединены линиями (точки таких пар называются *соседями*). Число соседей у каждой точки нечетно. В начальный момент все точки раскрашены в два цвета — красный и синий. Затем каждую минуту происходит одновременное перекрашивание точек по следующему правилу: каждая точка, у которой большинство соседей имеет отличный от нее цвет, меняет свой цвет; в противном случае ее цвет сохраняется.

Докажите, что наступит момент, начиная с которого у некоторых точек цвет не будет меняться, а у некоторых будет меняться каждую минуту.

б) Останется ли это утверждение верным, если не предполагать, что у каждой точки число соседей нечетно?

О. Козлов

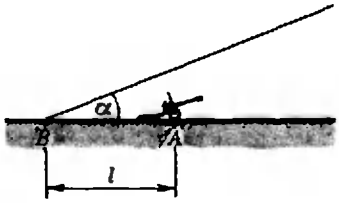


Рис. 1.

Ф678. Артиллерийское орудие стреляет из-под укрытия, наклоненного под углом α к горизонту (рис. 1). Орудие находится в точке A на расстоянии l от основания укрытия (точка B). Начальная скорость снаряда равна $|\vec{v}_0|$. Считая, что траектория снаряда лежит в плоскости рисунка, определить максимальную дальность полета.

С. Кротов

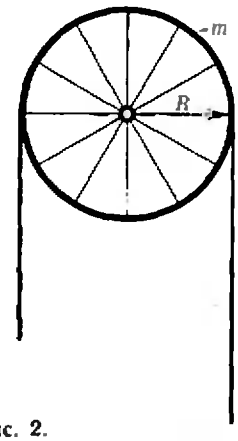


Рис. 2.

Ф679. Нерастяжимая шероховатая веревка линейной плотности ϱ и длины L перекинута через блок (рис. 2) так, что длина одного из свисающих концов равна $l (l < L/2)$. Блок, надетый на горизонтальную ось, представляет собой тонкий обруч массы m и радиуса R на легких спицах. Систему удерживают в состоянии покоя и затем отпускают. Найти силу давления на ось в первый момент времени. Трение между осью и блоком мало.

М. Эфроимский, ученик 10 кл.

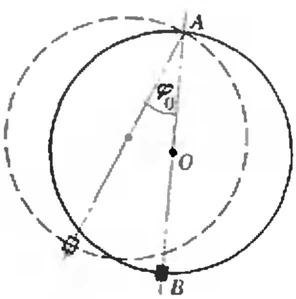


Рис. 3.

Ф680. Тонкий обруч радиуса R может вращаться вокруг горизонтального стержня A, параллельного оси обруча (рис. 3). На обруч надета небольшая шайба B массы m, которая может перемещаться по обручу без трения. Обруч вместе с шайбой как целое отклоняют от положения равновесия на угол φ_0 (см. рис. 3) и отпускают. Определить зависимость силы взаимодействия шайбы и обруча от угла φ, образуемого радиус-вектором OA с вертикалью.

Д. Белов

Ф681. Омметр состоит из миллиамперметра, рассчитанного на максимальный ток $I = 1$ мА, источника тока и добавочного резистора, регулировкой сопротивления которого омметр устанавливается на нулевую отметку при замкнутых накоротко выводах (нуль омметра находится в правом конце шкалы).

Схему собирают из батареи для карманного фонарика с ЭДС $\mathscr{E} = 4{,}5$ В, резистора с неизвестным сопротивлением и омметра. Когда омметр включают последовательно, он показывает 0 Ом. Когда его включают параллельно батарее, он показывает бесконечно большое сопротивление.

Определите величину неизвестного сопротивления резистора и напряжения на батарее и на омметре.

З. Рафаилов

Ф682. Зеркало антенны радиолокатора, работающего на волне $\lambda = 0{,}3$ м, представляет собой параболоид вращения с «выходным» диаметром $d = 6$ м, в фокусе которого (глубоко внутри параболоида) расположен точечный излучатель энергии. Эта же антенна используется для приема отраженного от самолета сигнала. Мощность излучателя $P_и = 2 \cdot 10^5$ Вт. Минимальная мощность

сигнала на входе антенны, необходимая для нормальной работы. $P_{min}=1\cdot10^{-13}$ Вт.
Оцените максимальную дальность обнаружения локатором самолета, площадь отражающей поверхности которого $S=5$ м^2. Считать, что мощность отраженного сигнала в $n=10$ раз меньше мощности падающего сигнала и отражение происходит равномерно во все стороны.

А. Зильберман

Решения задач

М616—М621; Ф623—Ф630

М616. *Можно ли числа 1, 2, ..., 30 разбить на группы*
а) по пять чисел,
б) по шесть чисел
так, чтобы суммы чисел во всех группах были одинаковыми?
в) При каких n и k числа 1, 2, ..., nk можно разбить на n групп по k чисел так, чтобы суммы чисел во всех группах были одинаковыми?

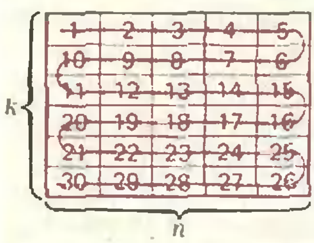


Рис. 1.

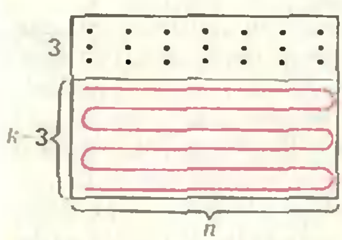


Рис. 2.

Назовем разбиение, удовлетворяющее условиям задачи, *правильным*. Ответ на общий вопрос в) задачи дает

Теорема. *Чтобы множество* {1, 2, ..., nk} *допускало правильное разбиение на k-элементные подмножества, необходимо и достаточно, чтобы либо k было четным, либо nk нечетным.*

Необходимость этих условий очевидна. В самом деле, пусть такое разбиение существует; тогда сумма всех чисел $\frac{nk(nk+1)}{2}$ делится на n (количество подмножеств), то есть число $k(nk+1)/2$ — целое; поэтому либо k четно, либо $nk+1$ четно, то есть nk нечетно.

Отсюда видно, что ответ на вопрос а) задачи — отрицательный ($k=5$ нечетно, а $n=6$ четно).

Для доказательства достаточности сформулируем теорему в более наглядном виде:
Чтобы nk чисел {1, 2, ..., nk} *можно было расставить в таблицу из k строк и n столбцов правильным образом (суммы чисел во всех столбцах одинаковы), необходимо и достаточно, чтобы либо k было четным, либо nk — нечетным.*

Пусть k четно. Тогда числа можно расставить в таблицу «змейкой» (рис. 1; для каждых двух последовательных строк сумма чисел в любом столбце одинакова).

Пусть nk нечетно. Расставим «правильно» в трех верхних строках таблицы числа {1, 2, ..., $3n$} (оставшиеся числа, начиная с числа $3n+1$, можно расставить в таблицу $(k-3)\times n$ змейкой, поскольку $k-3$ четно — рис. 2). Как это сделать при $n=3$, 5, 7, показано на рисунках 3, *а—в*. Аналогичным образом можно построить таблицу $3\times n$ для любого нечетного $n=2m+1$ (рис. 4; проверьте, что в нее входит по разу любое число от 1 до $3n=6m+3$).

Легко видеть, что справедливо тривиальное обобщение доказанной теоремы: чтобы nk чисел {$a+1$, $a+2$, $a+3$, ..., $a+nk$} можно было расставить в таблицу из k строк и n столбцов правильным образом, необходимо и достаточно, чтобы либо k было четным, либо nk — нечетным.

Это обобщение подсказывает еще один способ «правильной расстановки» в прямоугольнике $3\times n$: надо разбить прямоугольник $3\times n$ на прямоугольники 3×3, 3×5 (любое нечет-

а)

1	2	3
5	6	4
9	7	8
15	15	15

б)

1	2	3	4	5
8	9	10	6	7
15	13	11	14	12
24	24	24	24	24

в)

1	2	3	4	5	6	7
11	12	13	14	8	9	10
21	19	17	15	20	18	16
33	33	33	33	33	33	33

Рис. 3.

$n=2m+1$

3	1	2	...	$m+1$	$m+2$	...	$2m+1$
	$3m+2$	$3m+3$	...	$4m+2$	$2m+2$	...	$3m+1$
	$6m+3$	$6m+1$	...	$4m+3$	$6m+2$	...	$4m+4$

Рис. 4.

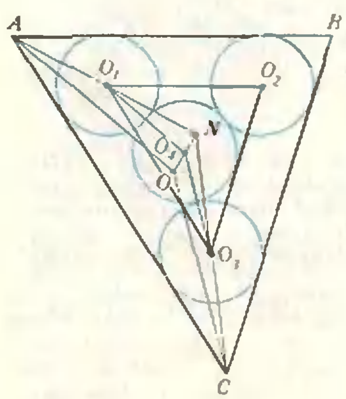
ное число $n \geqslant 9$ можно представить в виде $n=3p+5q$, где p, q — целые неотрицательные числа) и правильным образом расположить в них отрезки ряда $\{1, 2, ..., 3n\}$ — соответственно, из 9 и 15 чисел — так, как в уже готовых табличках на рисунках 3, *а*, *б* (при этом в каждом прямоугольнике придется добавить к числам свою константу a).

Подумайте над таким более сложным вопросом: при каких $k<n$ существует «магический прямоугольник» из чисел 1, 2, ..., nk, у которого суммы чисел по всем строкам равны между собой и суммы чисел по столбцам тоже. Магический квадрат существует при любом $n \geqslant 3$ (см. книгу М. М. Постникова «Магические квадраты», М., «Наука», 1964).

С. Берколайко, Н. Васильев

◆

М617. *Внутри треугольника расположены окружности α, β, γ, δ одинакового радиуса так, что каждая из окружностей α, β, γ касается двух сторон треугольника и окружности δ. Докажите, что центр окружности δ принадлежит прямой, проходящей через центры вписанной в данный треугольник окружности и окружности, описанной около него.*



Пусть ABC — данный треугольник и O_1, O_2, O_3 — центры конгруэнтных окружностей, касающихся пар его сторон, а O_4 — центр четвертой окружности — той, которая касается указанных трех (см. рисунок). Длины их радиусов обозначим через ϱ. Треугольник $O_1O_2O_3$ гомотетичен треугольнику ABC, так как его стороны соответственно параллельны сторонам треугольника ABC. Не трудно видеть, что центром этой гомотетии будет точка N, являющаяся одновременно центром окружности, вписанной в треугольник ABC, и центром окружности, вписанной в треугольник $O_1O_2O_3$. Действительно, прямые AO_1, BO_2, CO_3 являются биссектрисами углов как треугольника ABC, так и треугольника $O_1O_2O_3$, а точка N — точка пересечения этих биссектрис.

Теперь заметим, что точка O_4 является центром окружности, описанной вокруг треугольника $O_1O_2O_3$ (ее расстояние до каждой из вершин этого треугольника равно 2ϱ).

Рассмотрим гомотетию с центром в точке N, переводящую треугольник $O_1O_2O_3$ в треугольник ABC. Точка O_4 переходит при этом в некоторую точку M, лежащую на прямой NO_4. Мы уже знаем, что точка O_4 была центром окружности, описанной вокруг треугольника $O_1O_2O_3$; следовательно, ее образ — точка M — будет центром окружности, описанной вокруг треугольника ABC. Итак, центр окружности, описанной вокруг треугольника ABC, лежит на одной прямой с точкой O_4 и с центром окружности, вписанной в треугольник ABC. Тем самым доказано утверждение задачи.

Нетрудно вычислить величину радиуса ϱ этих четырех окружностей через r и R — радиусы вписанной в треугольник ABC окружности и окружности, описанной около него.

Заметим, что радиус окружности, вписанной в треугольник $O_1O_2O_3$, равен $r-\varrho$, а радиус окружности, описанной вокруг этого треугольника, равен 2ϱ.

Пусть k — коэффициент рассмотренной выше гомотетии. Тогда $(r-\varrho)k=r$ и $2\varrho k=R$. Выразив k из каждого соотношения и приравняв полученные выражения, найдем

$$\frac{r}{r-\varrho}=\frac{R}{2\varrho},$$

откуда

$$\varrho=\frac{rR}{R+2r}.$$

А. Савин

M618. *а) Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что $n!$ делится на n^2+1.*

б) Докажите, что для любого $\alpha>0$ существует бесконечно много натуральных n таких, что $[\alpha n]!$ делится на n^2+1. (Здесь $m!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m$; $[x]$ — целая часть числа x.)

В задаче, по существу, требуется доказать существование бесконечного числа натуральных n таких, что n^2+1 раскладывается в произведение не очень больших сомножителей. Это можно сделать различными способами.

Покажем, например, что существует бесконечно много n, при которых n^2+1 имеет вид $5m^2$. Иными словами, уравнение $n^2-5m^2=-1$ имеет бесконечное число натуральных решений. Это утверждение следует из следующих двух фактов, каждый из которых проверяется непосредственно: пара $n=2$, $m=1$ удовлетворяет этому уравнению, и если $n=a$, $m=b$ — его решение, то и пара $n=9a+20b$, $m=4a+9b$ тоже (как дойти до этих формул, объясняется в статье Н. Вагутена «Сопряжение числа», «Квант», 1980, № 2).

Это сразу дает нам доказательство утверждения задачи а). Действительно, при найденных значениях n имеем

$n^2+1=5m^2$, $m=\sqrt{\dfrac{n^2+1}{5}}<\dfrac{n}{2}$ и $n!$ делится на n^2+1, так как при $n>5$ в произведении $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ встречаются числа 5, m и $2m$.

Так же можно действовать и в общем случае б). Но для этого пришлось бы доказывать, что существует бесконечно много натуральных D таких, что число натуральных решений уравнения $n^2-Dm^2=-1$ бесконечно (выбрав тогда D так, чтобы выполнялось неравенство $D\geqslant 5/\alpha^2$, мы бы получили искомые значения n). Это утверждение верно, но элементарное доказательство его весьма сложно, поэтому мы пойдем другим путем.

Будем искать нужные нам n среди чисел вида $2k^2$. В этом случае n^2+1 разлагается в произведение $n^2+1=4k^4+1=(2k^2+2k+1)(2k^2-2k+1)$, но этого еще недостаточно. Покажем, как получить много таких k, при которых числа $P(k)=2k^2+2k+1$ и $Q(k)=2k^2-2k+1$ — составные (разлагаются на множители). Возьмем произвольное натуральное c и положим $p=P(c)$, $q=Q(c)$. Тогда при любом l число $P(c+lpq)$ делится на p, а $Q(c+lpq)$ делится на q (докажите!). Пусть $P(c+lpq)=p\cdot r$ и $Q(c+lpq)=q\cdot s$. Взяв c достаточно большим, мы можем добиться того, чтобы $p=P(c)$ и $q=Q(c)$ стали больше, чем $5/\alpha$ (это следует из того, что $P(k)$ и $Q(k)$ неограниченно возрастают с ростом k). В таком случае $n^2+1=4k^4+1=P(k)\cdot Q(k)=p\cdot q\cdot r\cdot s$, где

$k=c+lpq$, $r=P(k)/p<\dfrac{P(k)}{5/\alpha}<\dfrac{\alpha n}{4}$ (при $k>5$) и

$s=Q(k)/q<\dfrac{Q(k)}{5/\alpha}<\dfrac{\alpha n}{4}$ (при $k>5$). Выбирая теперь l так, чтобы p и q были меньше, чем $\alpha n/4$, получаем, что в последовательности $1, 2, 3, \ldots, [\alpha n]$ существуют четыре различных числа, одно из которых делится на p, другое на q, третье на r, а четвертое на s. Таким образом, мы построили бесконечное множество таких n, что $[\alpha n]!$ делится на n^2+1.

Возможны и другие решения этой задачи. Наиболее короткое, по-видимому, основано на разложении

$$64m^{12}+1=(4m^4+1)(4m^4-4m^3+2m^2-2m+1)\times$$
$$\times(4m^4+4m^3+2m^2+2m+1)$$

(это решение предложено нашим читателем *В. Юдаковым*).

А. Вайнтроб

◆

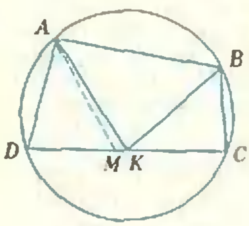


Рисунок к M619.

M619. *Докажите, что если для вписанного четырехугольника ABCD выполнено равенство $|CD|=|AD|+|BC|$, то биссектрисы его углов A и B пересекаются на стороне CD.*

Возьмем на стороне CD точку K так, чтобы $|DK|=|AD|$, $|KC|=|BC|$ (см. рисунок), и опишем около треугольника ABK окружность. Пусть M — вторая точка пересечения этой окружности с $[CD]$. Покажем, что $[AM]$ и $[BM]$ — биссектрисы соответствующих углов. Например, для $[AM]$ имеем

$$\widehat{BAM}=\widehat{BKC}=90^\circ-\frac{\widehat{BCK}}{2}=90^\circ-\frac{1}{2}(180^\circ-\widehat{DAB})=\frac{1}{2}\widehat{DAB},$$

что и требовалось.

И. Шарыгин

M620. *Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — действительные числа такие, что $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=1$. Докажите, что сумма модулей 2^n чисел*

$$\pm x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n$$

(со всевозможными комбинациями знаков «+» и «—») не превосходит 2^n.

Докажем вначале, что *если* $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2=k$, *то* $a_1+a_2+\ldots+a_k\leqslant k$. В самом деле, пусть $a_i=1+\alpha_i$ ($i=1, 2, \ldots, k$). Тогда

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2=k+2(\alpha_1+\ldots+\alpha_k)+(\alpha_1^2+\ldots+\alpha_k^2),$$

откуда

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k=-\frac{1}{2}(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_k^2)\leqslant 0.$$

Поэтому

$$a_1+a_2+\ldots+a_k=k+(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k)\leqslant k.$$

Обозначим теперь сумму модулей 2^n чисел

$$\pm x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n$$

(со всевозможными комбинациями знаков «+» и «—») через S. Нетрудно проверить, что сумма квадратов всех 2^n чисел, входящих в сумму S, равна $2^n(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)=2^n$. Обозначим 2^n чисел, входящие в S, через $a_1, a_2, \ldots, a_{2^n}$. Тогда $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{2^n}^2=2^n$, и из утверждения, доказанного выше, получаем оценку $a_1+a_2+\ldots+a_{2^n}\leqslant 2^n$, что и требовалось доказать.

Как справедливо заметил наш читатель *А. Хейфиц* из Ростова-на-Дону, задача М620 является частным случаем следующей общей задачи M. Klamkin'а (American Mathematical Monthly, 1975, 82, № 8, p. 829—830):

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — любые действительные числа. Тогда при $\lambda>2$ и при $\lambda<0$ имеет место неравенство

$$\sum|\pm x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n|^\lambda \geqslant 2^n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\lambda/2},$$

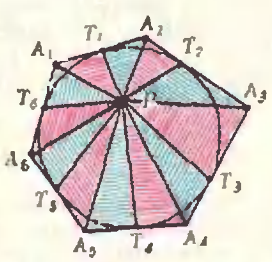
а при $0<\lambda<2$ — неравенство противоположного смысла. (Суммирование в левой части производится по всевозможным комбинациям знаков «+» и «—».)

Предлагаем вам подумать над доказательством этого утверждения самостоятельно.

И. Клумова

◆

M621. *Вокруг окружности описан n-угольник. Произвольная точка P внутри окружности соединена со всеми его вершинами и точками касания. Образовавшиеся $2n$ треугольников окрашены попеременно в красный и синий цвет. Докажите, что произведение площадей красных треугольников равно произведению площадей синих треугольников.*



Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ — описанный n-угольник, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — длины отрезков касательных, проведенных к окружности из точек $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ ($t_1=|A_1T_1|=|A_1T_n|$; $t_2=|A_2T_2|=|A_2T_1|$ и т. д.) и $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}, h_n$ — расстояния от точки P до прямых $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ соответственно (см. рисунок). Тогда произведения площадей красных и синих треугольников

$$\frac{t_1h_1}{2}\cdot\frac{t_2h_2}{2}\cdot\frac{t_3h_3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{t_nh_n}{2}$$

и

$$\frac{t_1h_n}{2}\cdot\frac{t_2h_1}{2}\cdot\frac{t_3h_2}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{t_nh_{n-1}}{2}$$

оба равны $t_1t_2\ldots t_nh_1h_2\ldots h_n/2^n$.

Укажем более сложный вариант этой задачи, предложенный *У. Аллой: если соединить последовательные точки касания отрезками, то произведение n длин тех частей отрезков, которые попали в синие треугольники, равно произведению n длин тех частей отрезков, которые попали в красные треугольники.* Для доказательства достаточно заметить, что отношение, в котором отрезок A_kP разбивает отрезок $T_{k-1}T_k$, равно отношению площадей треугольников $PT_{k-1}A_k$ и PT_kA_k.

◆

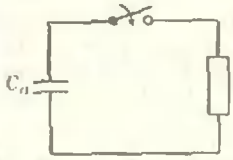
Н. Васильев

Ф623. *Переменный конденсатор с начальной емкостью C_0, заряженный до напряжения U, замыкают на резистор с сопротивлением R (см. рисунок). Как нужно изменять со временем емкость конденса-*

Ток в цепи определяется напряжением на резисторе, равным напряжению на конденсаторе: $I=U/R$. Так как ток должен быть постоянным, постоянным должно быть и напряжение на конденсаторе, то есть

$$\frac{q_0}{C_0}=\frac{q_0-\Delta q}{C},$$

тора, чтобы в цепи шел постоянный ток? Какую мощность развивают внешние силы, благодаря которым изменяется емкость конденсатора?



где q_0 — начальный заряд конденсатора, $\Delta q = It = Ut/R$ — заряд, прошедший по цепи за время t, C — емкость конденсатора в момент времени t. Отсюда

$$C = C_0\left(1 - \frac{\Delta q}{q_0}\right) = C_0\left(1 - \frac{t}{RC_0}\right).$$

Для определения мощности N, развиваемой внешними силами, воспользуемся законом сохранения и изменения энергии: изменение энергии системы за время t равно работе внешних сил, то есть

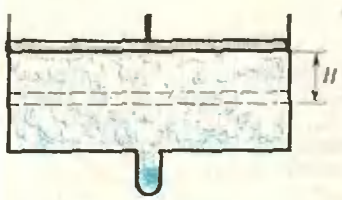
$$\left(\frac{CU^2}{2} - \frac{C_0U^2}{2}\right) + I^2Rt = Nt.$$

Отсюда, учитывая зависимость емкости от времени, находим мощность внешних сил:

$$N = \frac{U^2}{2R}.$$

П. Зубков

Ф624. *В отростке сосуда, закрытого плоским поршнем диаметра $D=5$ см, имеется небольшое количество воды (см. рисунок). Диаметр отростка $d=2$ мм. Если при постоянной температуре $t=20°C$ поршень опустить на $H=10$ см, то уровень воды в отростке повысится на $h=1$ мм. Найти давление насыщенных паров воды при температуре $t=20°C$.*



◆

Так как в отростке с самого начала находится вода, водяной пар в сосуде — насыщенный. При опускании поршня его давление не меняется, а весь пар, находящийся в «исчезающем» объеме

$$V = \pi D^2/4H,$$

конденсируется. Масса сконденсировавшейся воды равна

$$m = \rho\pi d^2/4h,$$

где $\rho = 10^3$ кг/м³ — плотность воды.

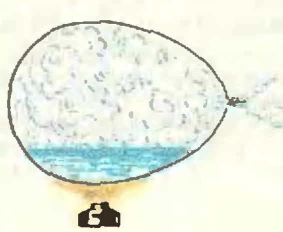
Из уравнения Менделеева — Клапейрона находим давление насыщенного пара:

$$p = \frac{m}{\mu}\frac{RT}{V} = \rho\left(\frac{d}{D}\right)^2\frac{h}{H}\frac{RT}{\mu} = 2{,}16 \text{ кПа}.$$

З а м е ч а н и е. В полученной формуле величины d и D, h и H образуют безразмерные комбинации. Следовательно, значения этих величин можно подставлять в любых, но обязательно одинаковых единицах измерения. Например, d и D — в миллиметрах, а h и H — в сантиметрах. При условии, что остальные величины (ρ, R, T и μ) выражены в единицах СИ, ответ получится в паскалях.

В. Белонучкин

Ф625. *Из яичной скорлупы сделан реактивный двигатель, показанный на рисунке. Площадь отверстия в скорлупе $s=3$ мм². Какова наибольшая сила тяги такого двигателя, если температура воды в скорлупе поддерживается равной 100°C?*



◆

Согласно закону сохранения импульса, реактивная сила, действующая на скорлупу, равна по модулю разности импульсов молекул, вылетевших из скорлупы за единицу времени и влетевших в скорлупу за то же время. С другой стороны, давление газа на стенку есть не что иное как удвоенный импульс молекул, ударяющихся о единицу площади поверхности стенки в единицу времени. Таким образом, импульс молекул, вылетающих из отверстия площадью s в единицу времени, равен $ps/2$, импульс влетающих молекул — $p_0s/2$ (где p и p_0 — давления внутри скорлупы и вне ее соответственно), а искомая сила

$$F = \frac{ps}{2} - \frac{p_0s}{2} = (p - p_0)\frac{s}{2}.$$

Максимальное давление, которое теоретически можно получить внутри скорлупы, несколько больше удвоенного атмосферного давления. Действительно, если воду в скорлупе нагревать так быстро, что масса воздуха не успеет измениться, давление будет складываться из давления воздуха (которое при 100°C несколько больше атмосферного) и давления насыщенного водяного пара (которое при 100°C равно атмосферному). В этом случае

$$F_{max} = (p_{max} - p_0)\frac{s}{2} = p_0\frac{T}{T_0}\frac{s}{2} \approx 0{,}2 \text{ Н}.$$

Однако оценочный расчет дает, что для этого нагревание воды должно продолжаться не более 10^{-2} с, что практически нереально.

Если же скорлупу нагревать медленно, весь воздух за время нагрева успеет выйти из скорлупы и давление внутри будет таким же, как и снаружи. Искомая сила при этом будет равна нулю.

С. Семенчинский

◆

Ф626. *Гимнаст падает с высоты $H=12$ м на горизонтальную натянутую упругую сетку, которая прогибается при этом на величину $h=1$ м. Оценить, во сколько раз максимальная сила, действующая на гимнаста со стороны сетки, больше силы тяжести, если размеры сетки много больше h и масса сетки мала по сравнению с массой человека.*

При деформации натянутой сетки в ней возникают упругие силы. Результирующая этих сил, действующая на гимнаста, направлена вверх. Так как, по условию задачи, прогиб сетки мал по сравнению с ее размерами, результирующая подчиняется закону Гука: $F=kx$, где F — модуль силы, действующей на гимнаста, x — величина прогиба сетки и k — коэффициент пропорциональности. Максимальный прогиб сетки $x_{max}=h$ и максимальное значение силы натяжения

$$F_{max}=kx_{max}=kh.$$

Таким образом, для оценки отношения F_{max}/mg необходимо найти k. Поскольку требуется лишь оценить это отношение, а не найти его точное значение, для простоты будем считать, что сетка абсолютно упругая и что сопротивлением воздуха движению гимнаста можно пренебречь. При этих упрощениях имеет место закон сохранения механической энергии: изменение потенциальной энергии тяготения гимнаста равно изменению потенциальной энергии упруго растянутой сетки, то есть

$$mg(h+H)=\frac{kh^2}{2}$$

(мы учли, что в момент, когда прогиб сетки равен h, скорость гимнаста равна нулю). Отсюда найдем коэффициент упругости сетки:

$$k=\frac{2mg(h+H)}{h^2}.$$

В соответствии с этим

$$\frac{F_{max}}{mg}=\frac{kh}{mg}=2\left(1+\frac{H}{h}\right)=26.$$

А. Изергин, С. Манида, В. Саулит

◆

Ф627. *Пока вы решали задачи из «Кванта», картошка, которая варилась на плите, сварилась, вода выкипела и кастрюля изнутри пригорела. Куда надо лить холодную воду, чтобы нагар легче отскочил — внутрь кастрюли или на ее внешнюю поверхность?*

Почему вообще нагар отлетает от кастрюли? Всегда ли это происходит? Оказывается, нет. Если оставить кастрюлю остывать на воздухе, нагар — увы! — не отлетит. Если же кастрюлю поливать водой, нагар отстанет от кастрюли. Почему?

Чтобы слой нагара отделился от металла, на него надо подействовать внешними силами, превышающими силы межмолекулярного притяжения. Это может сделать, например, водяной пар, когда вода проникает в трещины или поры слоя нагара и испаряется там. Однако такой эффект практически не дает никаких результатов.

Эксперимент показывает, что нагар отделяется гораздо лучше, если поливать водой не внутреннюю, а наружную поверхность кастрюли, причем начинать это нужно как можно быстрее, пока кастрюля еще не остыла. Причиной тому — неодинаковая скорость охлаждения металла и слоя нагара.

При охлаждении и металл, и нагар сжимаются. Если их температуры будут различными, со стороны более холодного тела на более горячее будут действовать сжимающие силы, а на более холодное тело — растягивающие. Оказывается, нагар отделяется от металла и в первом, и во втором случаях. Однако, чем больше разность температур, тем больше силы возникают, и нагар быстрее отскакивает от дна кастрюли. Поскольку теплопроводность у металла гораздо больше, чем у слоя нагара, если пригоревшую кастрюлю охлаждать водой снаружи, металл будет быстро остывать, а нагар будет продолжать оставаться горячим. Если же кастрюлю охлаждать изнутри, нагар будет остывать медленно, температура металла будет успевать следовать за температурой нагара и разности температур практически не будет.

Возникают ли силы, способствующие отделению нагара, при медленном охлаждении, то есть практически при равенстве температур металла и нагара? Да, так как у металла и у нагара различные коэффициенты линейного расширения. Но оказывается, эти силы недостаточны для разрушения слоя нагара и его отделения от дна кастрюли.

Л. Ашкинази

◆

Ф628. *В вертикальной трубке длиной $H=152$ см, запаянной с нижнего конца, имеется столбик воздуха высотой $h=76$ см, запертый столбиком ртути (рис. 1). Атмосферное давление равно 10^5 Па, а температура $t_0=17°$ С. До какой температуры t_1 следует нагреть воздух в трубке, чтобы вся ртуть вылилась?*

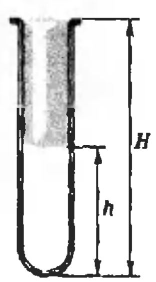


Рис. 1.

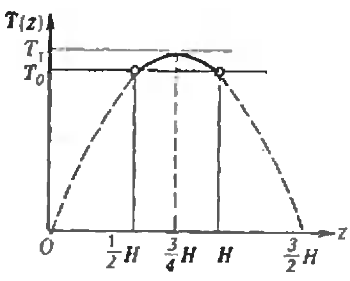


Рис. 2.

Начальное давление воздуха в трубке складывается из гидростатического давления столбика ртути высотой $H-h\approx 76$ см и давления атмосферы. Атмосферное давление по условию равно 10^5 Па ≈ 76 см рт. ст. Таким образом, начальное давление воздуха в трубке приблизительно равно удвоенному атмосферному давлению.

Будем считать, что вытекание ртути происходит медленно, так что систему в каждый момент можно считать находящейся в состоянии равновесия. В конечном состоянии, когда почти вся ртуть выльется, давление воздуха в трубке будет равно атмосферному, то есть вдвое меньше начального. Объем же воздуха HS (S — площадь поперечного сечения трубки) будет вдвое больше начального объема hS. Согласно уравнению состояния идеального газа это означает, что температура в конечном состоянии должна быть такой же, как и в начальном!

Разумеется, вообще без повышения температуры ртуть выливаться из трубки не будет. Поэтому полученный результат означает, что для ответа на вопрос задачи нельзя ограничиться рассмотрением только начального и конечного состояний, а нужно проследить за всем процессом.

Выясним, как должна изменяться температура воздуха в трубке для того, чтобы ртуть выливалась постепенно и в каждый момент времени систему можно было считать находящейся в состоянии равновесия.

Обозначим высоту столбика воздуха в некоторый момент времени через z. Тогда давление воздуха в трубке $p(z)$ равно

$$p(z)=p_0+\varrho g(H-z), \qquad (1)$$

где ϱ — плотность ртути, а p_0 — атмосферное давление, которое по условию задачи приблизительно равно давлению столбика ртути высоты $H/2$:

$$p_0=\varrho gH/2. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получаем

$$p(z)=\varrho g\left(\frac{3}{2}H-z\right). \qquad (3)$$

Поскольку мы предполагаем, что воздух в трубке находится в состоянии термодинамического равновесия при любом z, то давление $p(z)$ воздуха, занимаемый им объем Sz и температура $T(z)$ связаны уравнением состояния идеального газа:

$$\frac{p(z)Sz}{T(z)}=\frac{2p_0SH/2}{T_0}, \qquad (4)$$

где T_0 — начальная температура, $2p_0$ — начальное давление воздуха в трубке, $SH/2$ — начальный объем воздуха. Подставляя в (4) $p(z)$ из (3) и p_0 из (2), находим зависимость температуры от высоты столбика воздуха в трубке:

$$T(z)=T_0\frac{(3H-2z)z}{H^2}. \qquad (5)$$

График функции $T(z)$ показан на рисунке 2. Процессу выливания ртути соответствует участок между точками $z=H/2$ и $z=H$, изображенный сплошной линией. Видно, что для медленного (квазиравновесного) процесса температура должна сначала повышаться до значения $T_1=(9/8)T_0$ (при этом

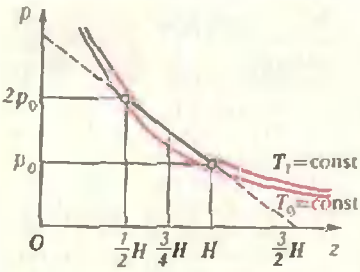


Рис. 3.

выльется половина первоначального количества ртути), а затем понижаться до начального значения T_0. Поэтому для полного выливания ртути воздух в трубке нужно нагреть до температуры $T_1 \approx 326$ К. Достигнув этой температуры, нужно сохранить контакт с нагревателем, имеющим температуру T_1. Дальше ртуть будет выливаться сама, причем этот процесс уже не будет квазиравновесным.

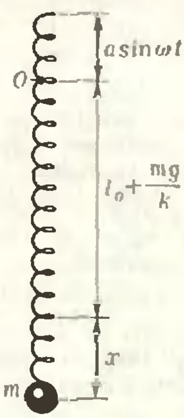
Чтобы лучше уяснить это, полезно рассмотреть процесс на p—V-диаграмме (рис. 3). Равновесному процессу вытекания ртути соответствует линейная зависимость давления воздуха в трубке от z, описываемая формулой (3) и показанная сплошной прямой между значениями $z = H/2$ и $z = H$. На этом же рисунке изображены изотермы, соответствующие температурам T_0 и T_1. Начальное и конечное состояние лежат на одной изотерме. Видно, что при температуре выше T_1 ни одна изотерма не пересекает прямой $p(z)$, то есть равновесие воздуха в трубке не возможно ни при каком значении высоты столбика z. Поэтому, если температура воздуха будет поддерживаться хотя бы чуть выше значения T_1, вся ртуть неизбежно будет вытолкнута воздухом из трубки.

Е. Бутиков, А. Быков, А. Кондратьев

◆

Ф629. *Шарик массы m подвешен на пружине жесткости k (пружинный маятник). Точка подвеса пружины совершает вертикальные гармонические колебания с амплитудой a и частотой ω. Как движется шарик при установившихся колебаниях?*

На рисунке показано положение системы в некоторый момент времени t. Точка O — положение равновесия точки подвеса; x — отклонение шарика от положения равновесия, при котором длина пружины равна $l_0 + mg/k$ (l_0 — длина пружины в нерастянутом состоянии).



Запишем уравнение движения шарика:

$$mg - k\Delta X = m\ddot{x}.$$

Подставив $\Delta X = \frac{mg}{k} + x + a\sin\omega t$ (полное удлинение пружины), получим:

$$m\ddot{x} + kx = -ka\sin\omega t. \qquad (1)$$

Вынужденные колебания шарика происходят с частотой вынуждающей силы, то есть с частотой ω. В установившемся режиме собственные колебания, частота которых $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, отсутствуют.

Будем искать решение (1) в виде

$$x = A\sin\omega t + B\cos\omega t, \qquad (2)$$

где A и B — некоторые постоянные коэффициенты, которые нужно определить. Взяв дважды производную от (2) и подставив (2) в (1), получим:

$$(-A\omega^2 m + kA)\sin\omega t + (-B\omega^2 m\cos\omega t + kB)\cos\omega t = -ka\sin\omega t. \qquad (3)$$

Это равенство должно выполняться в любой момент времени.

Взяв $t_1 = 0$ и $t_2 = \pi/2\omega$, найдем $B = 0$, $A = \frac{ka}{\omega^2 m - k} = \frac{a}{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1}$.

Подставив найденные значения A и B в (2), получим:

$$x = \frac{a\sin\omega t}{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1}.$$

А. Зильберман

◆

Ф630. *Элемент атомной батареи представляет собой конденсатор, на одну из пластин которого нанесен радиоактивный препарат, испускающий α-частицы со скоростью $v_0 = 2{,}2 \cdot 10^6$ м/с. Определить ЭДС этого элемента. Отношение заряда α-частицы к ее массе $k = 4{,}8 \cdot 10^7$ Кл/кг.*

Электродвижущая сила источника равна отношению работы сторонних сил по перемещению заряда по цепи к величине этого заряда. Максимальной ЭДС будет тогда, когда α-частицы уже не будут достигать противоположной пластины конденсатора. Другими словами, когда работа сторонних сил равна кинетической энергии вылетающих α-частиц: $\mathcal{E}q = \frac{mv_0^2}{2}$. Отсюда

$$\mathcal{E} = \frac{mv_0^2}{2q} = \frac{v_0^2}{2k} \approx 5 \cdot 10^5 \text{ В} = 500 \text{ кВ}.$$

А. Григоренко, ученик 10 класса, г. Макеевка Донецкой обл.

Играют полифигуры

В «Кванте» (1978, № 11, с. 37) уже рассматривались группы коней, живущих на (бесконечной) шахматной доске по закону взаимной защиты. Напомним, что набор коней, занимающий определенную позицию, называется *активным эскадроном*, если, передвигая их (на каждом ходу по шахматным правилам передвигается какой-нибудь из коней набора), мы можем достичь одним из коней любого наперед заданного поля, причем как в начальный момент, так и после каждого хода любой конь защищен, по крайней мере, одним конем из набора. Пример активного эскадрона из пяти коней показан на рисунке 1 (доказательство — «Квант», 1978, № 12, с. 61).

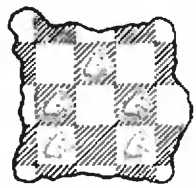


Рис. 1.

Естественным обобщением активного эскадрона является полифигура *П* (*n*, *k*) — набор из *n* одинаковых фигур, передвигая которые (на каждом ходу по шахматным правилам передвигается какая-нибудь из фигур набора), мы можем достичь одной из фигур любого наперед заданного поля, причем как в начальный момент, так и после каждого хода, любая фигура защищена, по крайней мере, *k* фигурами из набора*). Для коней соответствующая полифигура будет называться *эскадроном* *Э*(*n*, *k*) (например, активный эскадрон на рисунке 1 — это *Э*(5,1)), для королей — *кланом* *К*(*n*, *k*), для ферзей — *фракцией* *Ф*(*n*, *k*) и для ладей — *лигой* *Л*(*n*, *k*).

Задача 1. *Докажите, что лига, фракция, эскадрон и клан возможны только при* $k=1$, $k<3$, $k<2$ *и* $k<2$ *соответственно.*

На рисунке 2 показаны *Л*(3,1), *Ф*(2,1), *Ф*(3,2), *К*(2,1) и *К*(4,2). Легко проверить, что при фиксированном *k* эти полифигуры минимальны по *n* (по количеству фигур).

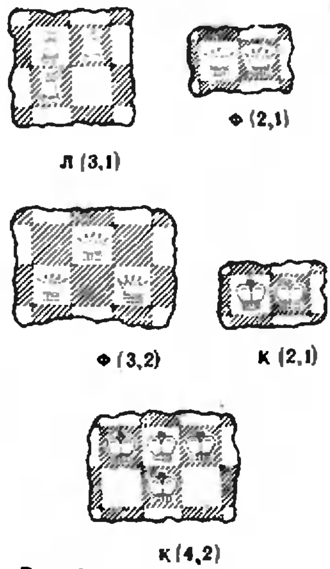


Рис. 2.

На рисунке 3 показана минимальная (по *n*) фракция *Ф*(*n*, 3): для нее $n=6$.

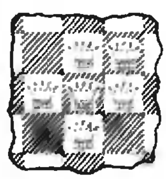


Рис. 3.

Задача 2. *Проверьте, что полифигура на рисунке 3 действительно является фракцией Ф(6,3) и докажите ее минимальность по n (при K=3).*

Указание: сдвиг на одну клетку всей фракции — шестиходовка!

Описанными выше полифигурами можно играть (например, на доске 8×8), если договориться о правилах; ниже мы сформулируем три правила, позволяющих ставить игровые задачи.

I. Игроки ходят поочередно, на каждом ходу переставляя одну из своих фигур на свободное поле (брать чужие фигуры нельзя) так, чтобы не испортить своих полифигур.

II. Полифигура *П* (*n*, *k*) считается *уничтоженной* ходом полифигуры *П′* (*n′*, *k′*), если у полифигуры *П* этим ходом нарушено «условие *k*-кратной защиты». Уничтоженная полифигура снимается с доски. (Например, эскадрон *Э*(5,1) на рисунке 4 уничтожил фракцию *Ф*(6,3), разрушив взаимную защиту двух крайних слева ферзей.)

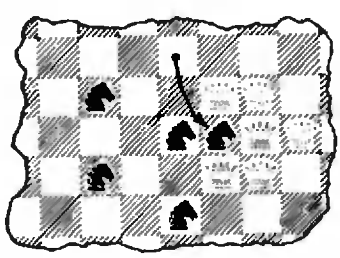


Рис. 4.

III. Клану *К*(*n*, *k*) объявлен шах (соответственно мат), если он объявлен каждому из королей клана. (На рисунке 5 показано, как фракция *Ф*(3,2) объявила мат клану *К*(2,1).)

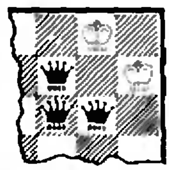


Рис. 5.

Задача 3. Поставит ли фракция *Ф*(2,1) форсированный мат клану *К*(2,1) на доске 8×8? А фракция *Ф*(3,2) — клану *К*(2,1)?

При этих правилах ни клан, ни эскадрон не могут быть уничтожены. Подумайте, как переделать правило II с тем, чтобы эскадрон тоже можно было уничтожить.

В заключение мы предлагаем вам самостоятельно поиграть в полифигурные шахматы. Если при этом возникнут интересные вопросы, напишите нам.

В. Чванов

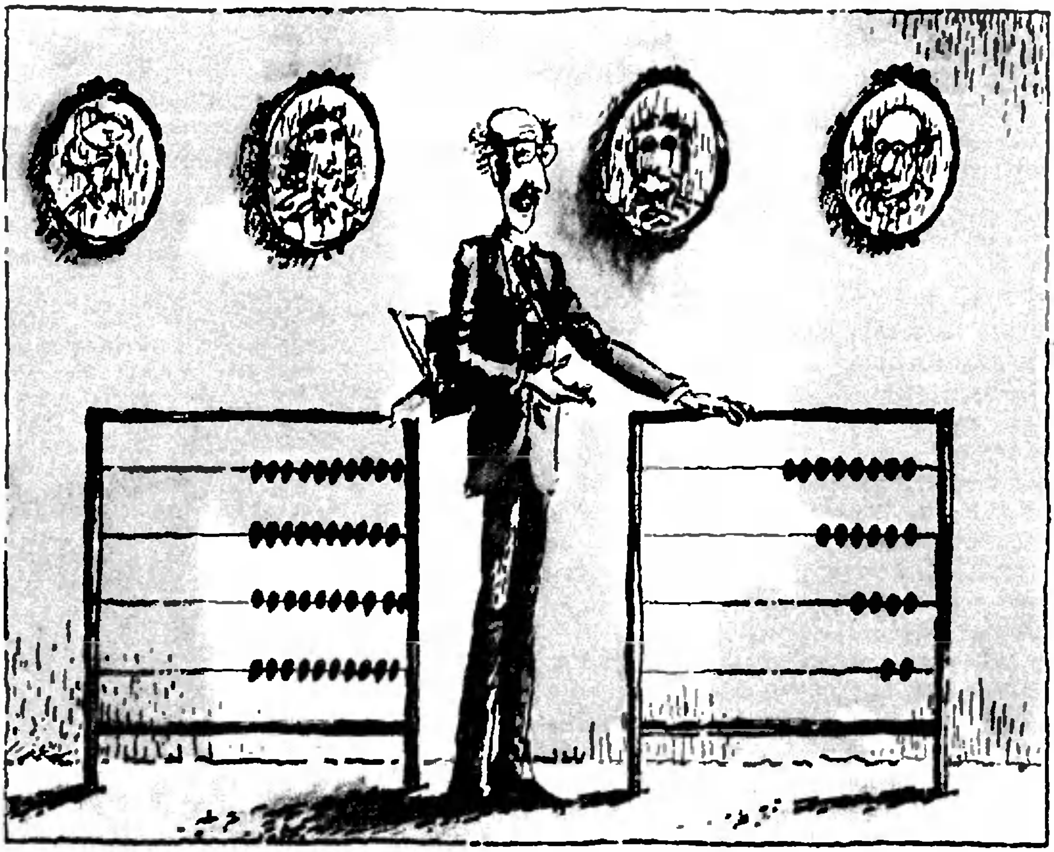
*) При этом фигуры считаются «непрозрачными»: например, две ладьи Ла2 и Ла3 защищают ладью Ла1 не двукратно, а однократно.

КВАНТ для младших школьников

Задачи

1. В жаркий летний день представители нескольких фирм собрались на переговоры.
Вначале, при обсуждении двусторонних договоров, за каждым столом сидели по два человека — и служители поставили на каждый стол по бутылке минеральной воды.
Потом представители разбились на группы по трое — и служители принесли каждой группе по бутылке лимонада.
В заключение за каждым столом уселись по четыре человека — и на каждый стол поставили по бутылке фруктового сока. Кроме того, каждый представитель выпил по бутылочке пепси-колы.
После совещания со всех столов было собрано 50 пустых бутылок. (Известно, что все поданные напитки были выпиты и никто не унес с собой ни одной бутылки.)
Сколько человек участвовало в совещании?
2. Имеются шестилитровая кастрюля и четырехлитровая банка (см. рисунок). Требуется налить из бочки один литр воды.
3. Дедушка подарил Пете на день рожденья пятирублевую бумажку. Пошел Петя в «Спорттовары», чтобы купить компас за 3 рубля. Подошел к кассе, а кассирша говорит: «Чем я тебе сдачи давать буду? У меня одна медь, да и той, боюсь, не хватит!» Стала набирать 2 рубля: сначала пятаками — пятаки скоро кончились, потом трехкопеечными монетами — и эти кончились, затем «двушками». Когда кончились и «двушки», набралось 1 рубль 99 копеек, а в кассе осталась одна-единственная копейка. Взяла ее кассирша и говорит: «Ну, повезло тебе! Ровно 2 рубля набралось!»
Взял Петя сдачу, получил компас, собрался уходить и вдруг видит на витрине замечательное увеличительное стекло — и стоит всего-то 1 рубль. Думает Петя: «Наберется рубль без сдачи — куплю!»
Пришел он домой и рассказывает дедушке всю эту историю. Дедушка подумал секундочку и говорит: «Показывай скорей и компас, и стекло. Посмотрим, такое ли оно замечательное!»
Как дедушка догадался, что Петя купил увеличительное стекло?

Эти задачи нам предложили
А. Кушин, Г. Кушниренко,
А. Халамайзер



В. Касаткин

Пригодны ли счеты?

В математическом кабинете, где занимались участники школьного математического кружка, стояли счеты, изображенные на заставке слева. Но однажды, прийдя на очередное занятие кружка, школьники увидели еще одни, «испорченные» счеты (они изображены на заставке справа).

— Что это такое? Зачем нам испорченные счеты? — спросил кто-то из ребят.

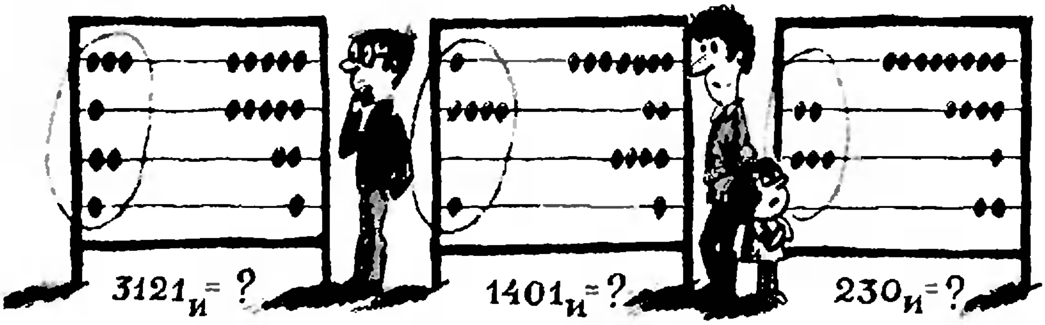
— Не удивляйтесь,— сказал учитель математики.— Это новые счеты, на которых мы сейчас научимся считать.

Прежде всего разберемся в их конструкции. Каждая косточка нижней проволочки, как и на привычных вам счетах, имеет «вес» равный единице. А вот любая из четырех косточек, расположенных на второй снизу проволочке, заменяет уже не десять косточек нижней проволочки, как в обычных счетах, а две, и поэтому ее «вес» равен не десяти, а двум. Легко сообразить, какой «вес» имеет любая из косточек, расположенных на третьей и четвертой проволочках.

— Я, кажется, догадался,— воскликнул один из школьников.— Любая косточка третьей проволочки заменяет четыре косточки второй проволочки, и поэтому «вес» ее равен восьми, а «вес» косточки с самой последней проволочки равен уже сорока восьми единицам.

— Правильно,— подтвердил учитель.— Таким образом, «веса» косточек образуют последовательность 1, 2, 8 и 48.

Знакомство с необычными счетами привело нас к новой системе счисления; назовем ее «испорченной». Посмотрим, что в этой системе означает, например, запись $3021_к$.



Имеем

$3021_и = 3 \cdot 48 + 0 \cdot 8 + 2 \cdot 2 + 1 = 149_{10}$,

то есть $3021_и$ — это десятичное число 149.

Нетрудно сообразить, что в младшем разряде этой системы придется использовать только цифры 0 и 1, в следующем — цифры 0, 1, 2, 3, в следующем — цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5. Легко понять, как будут выглядеть в этой системе признаки делимости на 2, 8, 48 (числа берутся в десятичной системе): число $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ четно тогда и только тогда, когда $a_4 = 0$; число $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ делится на 8 тогда и только тогда, когда $a_3 = a_4 = 0$ (то есть оканчивается двумя нулями); число $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ делится на 48 тогда и только тогда, когда $a_2 = a_3 = a_4 = 0$ (оканчивается тремя нулями).

Научиться считать на «испорченных» счетах совсем несложно.

Прошло несколько минут, и ребята уверенно складывали и вычитали числа в «испорченной» системе счисления, решали и другие забавные задачи на «испорченных» счетах.

Предлагаем и вам попробовать свои силы в решении некоторых задач.

Задачи

1. а) Имеется 23 камешка. При их пересчитывании (по одному) велось откладывание косточек (по одной) на новых счетах. Как будут выглядеть счеты по окончании пересчитывания всех камешков? Изобразите счеты с отмеченным на них результатом пересчитывания и запишите это число в «испорченной» системе.

б) Какое наибольшее число можно отложить на «испорченных» счетах? Запишите это число в «испорченной» системе. Какому десятичному числу оно равно?

2. На счетах, изображенных на рисунке, отмечены числа в «испорченной» системе. Каким десятичным числам они соответствуют?

3. Отложите на необычных счетах десятичные числа 37, 59, 101, 269.

4. Выполните указанные действия (результаты проверьте на счетах):

$231_и + 120_и$; $4021_и + 2521_и$; $320_и + 4430_и$;
$221_и - 30_и$; $1001_и - 231_и$; $4021_и - 311_и$.

5. Утройте число $21_и$. Расскажите, как вы выполнили умножение.

6. Выполните умножение $1311_и \times 21_и$.

Письмо в редакцию

Уважаемый товарищ редактор!

Недавно вышла из печати книга В. Гильде и З. Альтрихтера «С микрокалькулятором в руках» (М., «Мир», 1980), рассчитанная на массового читателя. Хочу обратить Ваше внимание на опечатки в этой (в целом очень хорошей) книге на с. 38, которые опасны прежде всего для юного читателя, поскольку старшее поколение, возможно, еще помнит правильное значение числа π и стихи для его запоминания.

Во-первых, приведенное значение числа π неверно в двух последних знаках. Правильное значение составляет 3,1415926536, это округление значения 3,141592653589...

Во-вторых, не подходит известный стишок для запоминания числа π. В этом стишке число букв в словах определяет последовательные цифры числа π, но все дело в том, что приведенный в книге текст дает верный результат только в старой орфографии:

Кто и шутя, и скоро
пожелаетъ
Пи узнать число, ужъ знаетъ!

Е. С.

Р. Гордин

Что такое степень?

Оперируя со степенями, мы обнаруживаем замечательный факт: умножению, делению и возведению в степень степеней одного и того же числа с целыми показателями соответствуют сложение, вычитание и умножение показателей. Это соответствие сохраняется и при переходе к рациональным показателям.

Возникает вопрос: можно ли так определить степень с действительным показателем, чтобы замеченное нами соответствие сохранилось?

Здесь мы проследим, листая школьные учебники, за всеми последовательными этапами обобщения понятия степени: от степеней с натуральными показателями до степеней с произвольными действительными показателями.

Степень с натуральным показателем

Определение 1. $a^n = a \cdot a \cdot \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, $a^1 = a$ (здесь $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$). Из этого определения легко вывести следующие свойства степени:

1^0. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

2^0. $\dfrac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} \text{ при } m > n \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} \text{ при } n > m. \end{cases}$

3^0. $(a^m)^n = a^{mn}$.

4^0. Если $a > 0$, то $a^n > 0$.

5^0. Если $a > 1$ и $m > n$, то $a^m > a^n$.

6^0. Если $0 < a < 1$ и $m > n$, то $a^m < a^n$.

Обратите внимание на свойство 1^0. Его иногда называют *основным свойством показателя степени* или *основным свойством показательной функции.*

При дальнейших последовательных обобщениях понятия степени мы будем в первую очередь стремиться к сохранению именно этого свойства (остальные свойства 2^0—6^0 также будут сохраняться, и на каждом шагу их можно будет вывести из свойства 1^0).

Степень с целым показателем

Примем следующие определения («Алгебра 7», §4):

Определение 2. $a^0 = 1$.

Целесообразность этого определения вытекает из простого рассуждения: пусть $a^0 = k$; тогда (мы стремимся к сохранению свойства 1^0) $a^m \cdot k = a^m \cdot a^0 = a^{m+0} = a^m$; следовательно, должно быть $k = 1$.

Это рассуждение не является доказательством соотношения $a^0 = 1$. Оно лишь подводит нас к «хорошему» определению нулевой степени.

Определение 3. Пусть $a \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Это определение также диктуется необходимостью сохранения свойства 1^0 (убедитесь в этом).

Докажем теперь, что $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ для любых $m \in \mathbf{Z}$ и $n \in \mathbf{Z}$.

Мы ограничимся случаем $m < 0$ и $n < 0$.

Имеем $a^m \cdot a^n = \dfrac{1}{a^{-m}} \cdot \dfrac{1}{a^{-n}} = \dfrac{1}{a^{-m-n}} = \dfrac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}$.

Упражнения.

1. Докажите свойство 1^0 для оставшихся случаев, а также свойства 2^0—6^0.

2. Почему следующие определения — «плохие»: а) $a^{-n} = \dfrac{2}{a^n}$; б) $a^{-n} = -a^n$; в) $a^0 = 2$?

Степень с рациональным показателем

Напомним, прежде всего, что число r называется *рациональным*, если $r = \dfrac{m}{n}$, где $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$. При этом представление рационального числа в виде дроби не единственно. Так, $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\ldots$

Будем искать определение степени a^r, где $a>0$, $r=\frac{m}{n}$, исходя из необходимости сохранения свойства 1^0.*) Это значит, что для любых r_1 и r_2 должно выполняться соотношение $a^{r_1+r_2}=a^{r_1}\cdot a^{r_2}$.

Предположим, что мы уже знаем, что такое $a^{\frac{m}{n}}$. Пусть $a^{\frac{m}{n}}=k$. Тогда должно быть $(a^{\frac{m}{n}})^n=k^n=$ $=a^{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\ldots+\frac{m}{n}}=a^m$. Окончательно получаем $k=\sqrt[n]{a^m}$.

Это соотношение подсказывает следующее определение:

Определение 4. Если $a>0$, то $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$. Заметим, что для отрицательных a понятие степени с рациональным не целым показателем *не определяется*. Также заметим, что в учебнике изучению степеней с рациональными показателями предшествует тема «Корень n-й степени и его свойства» («Алгебра 8», §9), в которой выводятся основные свойства корня n-й степени, позволяющие доказать, что принятое нами определение a^r корректно. Под корректностью определения в данном случае понимается независимость числа a^r от записи числа r в виде дроби, то есть, в конечном счете, справедливость равенства $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[kn]{a^{km}}$, где $k\in\mathbf{N}$, $m\in\mathbf{Z}$, $n\in\mathbf{N}$.

Упражнение 3. Повторите свойства корня n-й степени и выведите из них свойства 1^0—6^0 степени с рациональным показателем.

Степень с действительным показателем.

В учебнике «Алгебра и начала анализа 10» вводится показательная функция с любым действительным показателем (п. 108). Фактически и здесь ставится задача найти «хорошее» определение степени с действительным показателем, причем в самом определении показательной функции перечисляются те ее свойства, которые могут быть выведены из этого «хорошего» определения. Каково же «хорошее» определение степени с любым действительным показателем?

Пусть для определенности $a>1$. Если x — рациональное число, то a^x нами уже определено, причем функция $y=a^x$ в силу свойства 5^0 возрастает на множестве $\mathbf{Q}$ всех рациональных чисел (при $0<a<1$ функция $y=a^x$ убывает (свойство 6^0) на множестве $\mathbf{Q}$).

Для того чтобы продолжить функцию $y=a^x$ на множество $\mathbf{R}$ всех действительных чисел, мы сначала потребуем лишь сохранения монотонности этой функции.

Пусть α — иррациональное число, а r_1 и r_2 — рациональные числа, для которых $r_1<\alpha<r_2$. Предположим, что нам уже известно, что такое a^α. В силу нашего требования, должны быть справедливы неравенства

$$a^{r_1}<a^\alpha<a^{r_2}.$$

Таким образом, число a^α должно быть заключено между любыми двумя числами a^{r_1} и a^{r_2}, где $r_1<\alpha<r_2$.

В курсах математического анализа доказывается, что существует единственное число β, для которого справедливы все неравенства $a^{r_1}<$ $<\beta<a^{r_2}$, где r_1 и r_2 — произвольные рациональные числа, для которых $r_1<\alpha<r_2$.

Это дает возможность сформулировать следующее определение:

Определение 5. Пусть α иррационально и $a>0$. Тогда a^α — это действительное число, заключенное между любыми двумя числами a^{r_1} и a^{r_2}, где r_1 и r_2 рациональны и $r_1<\alpha<r_2$.

Рамки школьного курса не позволяют доказать существование числа a^α, и мы примем его на веру. Ограничимся доказательством единственности.

Для доказательства нам понадобится важное и само по себе неравенство Бернулли $(1+h)^n\geqslant 1+nh$, где $n\in\mathbf{N}$ и $h\geqslant -1$.

*) «Алгебра 8», § 10.

Докажем его методом математической индукции.

При $n=1$ это неравенство верно $(1+h \geqslant 1+h)$. Предположим, что $(1+h)^k \geqslant 1+kh$, и докажем, что $(1+h)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)h$. Имеем

$$(1+h)^{k+1}=(1+h)(1+h)^k \geqslant$$
$$\geqslant (1+h)(1+hk)=1+hk+h+h^2k=$$
$$=1+h(k+1)+h^2k \geqslant 1+h(k+1),$$

что и требовалось доказать.

Докажем теперь, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ при $a>0$.

Пусть дано $\varepsilon>0$ и $a>1$ *), тогда $\sqrt[n]{a}=1+\varepsilon_n$, где $\varepsilon_n>0$. Отсюда, применяя неравенство Бернулли, получаем $a=(1+\varepsilon_n)^n \geqslant 1+n\varepsilon_n$. Поэтому $0<\varepsilon_n \leqslant \frac{a-1}{n}$. Легко видеть, что $\frac{a-1}{n}<\varepsilon$ при $n>N=\left[\frac{a-1}{\varepsilon}\right]+1$.

Мы доказали, таким образом, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n=0$, но это и значит, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} (1+\varepsilon_n)=1.$$

Теперь перейдем к доказательству единственности.

Пусть существуют 2 числа β и γ, для которых справедливы неравенства $a^{r_1}<\beta<a^{r_2}$ и $a^{r_1}<\gamma<a^{r_2}$ при любых рациональных r_1 и r_2, для которых $r_1<\alpha<r_2$. Пусть для определенности $\beta>\gamma$.

Тогда $0<\beta-\gamma<a^{r_2}-a^{r_1}=a^{r_1}(a^{r_2-r_1}-1)$. Ясно, что $a^{r_1}<a^{[\alpha]+1}=c$. Существуют для любого $n \in \mathbf{N}$ такие $r_1^{(n)}$ и $r_2^{(n)}$, что $r_1^{(n)}<\alpha<r_2^{(n)}$ и $r_2^{(n)}-r_1^{(n)}<\frac{1}{n}$.

Для этих $r_2^{(n)}$ и $r_2^{(n)}$ (по свойству 5^0 для рационального показателя) $0<\beta-\gamma<c(a^{\frac{1}{n}}-1)$.

По доказанному ранее, для любого $\varepsilon>0$ существует такое N, что при всех $n>N$ справедливо неравенство $a^{\frac{1}{n}}-1<\frac{\varepsilon}{c}$. Поэтому при любом $\varepsilon>0$ справедливо неравенство $0<\beta-\gamma<\varepsilon$, что невозможно.

Исходя из определения 5, можно доказать, что для степени с действительным показателем сохраняются все свойства 1^0—6^0, установленные нами для натуральных показателей. Этим и завершается построение функции $y=a^x$.

*) Случай $0<a<1$ разберите самостоятельно.

Следует заметить, что при определении степени с иррациональным показателем мы отошли от принятой ранее схемы: строить определения, лишь исходя из необходимости сохранения свойства 1^0.

Оказывается, продолжить показательную функцию $y=a^x$, определенную на множестве $\mathbf{Q}$ рациональных чисел, с сохранением лишь свойства 1^0 можно бесконечным количеством способов.

Точнее, существует бесконечно много функций $y=f(x)$ таких, что $f(x)=a^x$ при $x \in \mathbf{Q}$, для которых $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$.

Из всех этих функций монотонной (и непрерывной) будет лишь одна построенная нами функция $y=a^x$. Все остальные функции этого семейства устроены достаточно «дико». Например, любая из них не ограничена ни на каком промежутке числовой оси.

Как вычислить $2^{\sqrt{2}}$?

Рассмотрим несколько десятичных приближений $\sqrt{2}$ по недостатку и по избытку. Эти приближения удовлетворяют неравенствам $1<\sqrt{2}<2$; $1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5$; $1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$. Тогда, по нашему определению 5, число $2^{\sqrt{2}}$ должно удовлетворять неравенствам $2^1<2^{\sqrt{2}}<2^2$; $2^{1{,}4}<2^{\sqrt{2}}<2^{1{,}5}$; $2^{1{,}41}<2^{\sqrt{2}}<2^{1{,}42}$, или $2<2^{\sqrt{2}}<4$; $2{,}6<2^{\sqrt{2}}<2{,}9$; $2{,}65<2^{\sqrt{2}}<2{,}68$.

Второе из этих неравенств позволяет найти $2^{\sqrt{2}}$ с точностью до целых, третье — с точностью до десятых. Понятно, что можно получить значение $2^{\sqrt{2}}$ с любой заданной точностью, взяв соответствующие приближения $\sqrt{2}$.

Упражнения

4. Чем больше $2^{\sqrt{3}}$ или $3^{\sqrt{2}}$?

5. Докажите свойства 4^0 и 5^0 для степени с любым действительным показателем.

6. Докажите свойство 1^0 для степени с любым действительным показателем.

7. Докажите непрерывность функции $y=a^x$ а) при $x=0$; б) при $x=x_0$, где $x_0 \in \mathbf{R}$.

8. Пусть α и β — иррациональные числа. Может ли число α^β быть рациональным?

9. Докажите, что $y=a^x$ и $y=\exp_a x$ — одна и та же функция.

Модели звездчатых многогранников

На первой и четвертой страницах обложки воспроизведены два красочных чертежа (эпюра)*), с помощью которых можно строить модели различных многогранников, в частности звездчатых. Прежде чем начать конструирование модели, ознакомьтесь с основными приемами построения развертки многогранника, описанными ниже.

Возьмем небольшой лист кальки; на нем и будет нарисована развертка (вернее, ее половина — см. рис. 1) одного из многогранников.

Первый шаг состоит в выборе начальной грани на одном из эпюров или, что удобнее, на рисунках 2, 3 (этот выбор определяет, какой именно из возможных многогранников мы построим); в нашем случае выбран центральный пятиугольник $PSTUR$ на рисунке 2. Перенесем этот пятиугольник на кальку и оставим ее на рисунке в том же положении.

Рассмотрим одну из вершин грани $PSTUR$, скажем P. Число граней нашего многогранника, примыкающих к этой вершине, будет равно числу прямых (в данном случае 3), проходящих через нее на эпюре, увеличенному на 1. Как построить эти 4 грани?

Если вершина является *полюсом* (как P), то есть около нее на эпюре нарисованы черные дужки, нужно воткнуть циркуль в эту вершину, повернуть кальку на угол, указанный меньшей из дужек, и перенести на кальку очертания той же грани в новом положении. Так у нас получится вторая грань, примыкающая к первой по ребру PS (рис. 1). Выполнив еще дважды поворот на тот же угол, мы получим остальные две грани, примыкающие к P.

*) Метод раскрашивания эпюров «концентрическими кругами» предложен архитектором А. М. Бреславец.

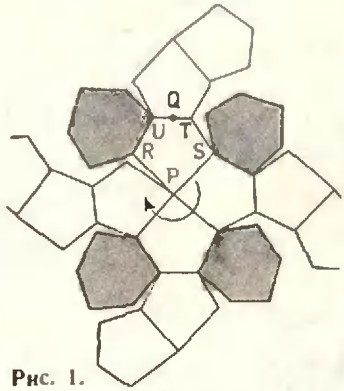


Рис. 1.

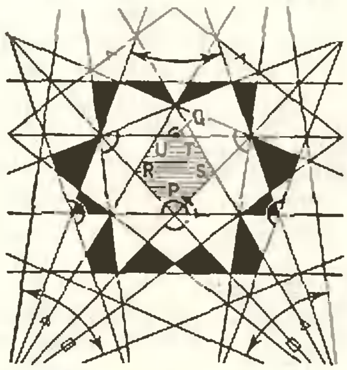


Рис. 2.

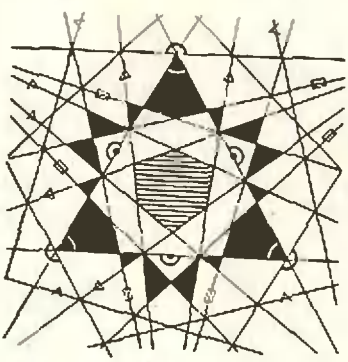


Рис. 3.

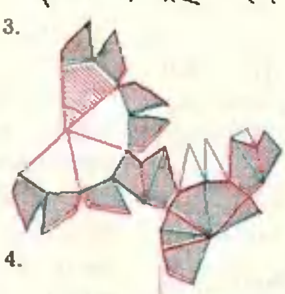


Рис. 4.

Возьмем теперь вершину U, которая уже не является полюсом. Через нее проходят 2 прямые, и, значит, к ней должны примыкать 3 грани.

Чтобы найти грань, примыкающую к ребру UT, заметим, что середина Q этого ребра — полюс с дужкой в 180°. В соответствии с этим, повернем кальку около Q на 180° и нарисуем новое положение грани.

На ребре UR уже нет полюсов; дальнейшее построение в таких случаях нужно продолжить на другом эпюре. Чтобы найти место, куда следует приложить кальку, заметим, что прямая отмечена на рисунке 2 значком △. Найдите этот же значок на рисунке 3, приложите ребро UR вдоль какой-нибудь прямой, помеченной им, и двигайте вдоль нее кальку, пока к грани $PSTUR$ не примкнет грань того же цвета (центральная шестиугольная грань на рисунке 3 — найдите ее и на рисунке 1!). Такое совмещение может получиться не сразу — прямых со знаком △ на рисунке 3 несколько, нужную вы найдете методом проб и ошибок.

Дальнейшие построения проводятся в таком же духе. При этом кальку приходится перебрасывать с одной эпюры на другую, пользуясь меткой △, но не бездумно (нужно помнить, что склеиваются ребра одинаковой длины!). В итоге вы должны получить на кальке развертку, совпадающую с рисунком 1.

Проделав это, проверьте себя, выполнив теми же приемами развертку звездчатого многогранника, показанную на рисунке 4. Начинается это построение с одной из черных четырехугольных граней на рисунке 3 (на рисунке 4 эта грань заштрихована красным).

Разобравшись в методике построения разверток, вы можете перейти к практическому конструированию моделей в натуральную величину. Для этого следует перенести оба эпюра в увеличенном масштабе на два листа ватмана. (Это можно сделать с помощью эпидиаскопа или пантографа; если у вас нет этих приборов, вам придется поработать циркулем и линейкой.) Затем возьмите большой лист кальки, выбирайте начальную грань... и действуйте!

Начальных граней много — на целый школьный кружок хватит. Если у вас получатся красивые модели, сфотографируйте и пришлите их нам.

В. Гамаюнов

А. Егоров

Логарифмические уравнения

На вступительных экзаменах часто встречаются уравнения, содержащие переменную под знаком логарифма. Такие уравнения принято называть *логарифмическими*.

П р о с т е й ш и м логарифмическим уравнением является уравнение вида $\log_a x = b$. Если $a>0$, $a\neq 1$ и $b>0$, оно имеет единственный корень $x=a^b$.

В дальнейшем мы часто будем пользоваться следующими свойствами логарифмов:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y, \qquad (1)$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \qquad (2)$$

$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x, \qquad (3)$$

$$\log_{a^\beta} x = \frac{1}{\beta} \log_a x, \qquad (4)$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \qquad (5)$$

(здесь всюду $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$, $x>0$, $y>0$). Полезно также запомнить такой частный случай формулы (5):

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}. \qquad (5')$$

Рассмотрим теперь некоторые распространенные типы логарифмических уравнений.

П р и м е р 1. *Решить уравнение*

$$\log_4 x + \log_{\frac{1}{16}} x + \log_8 x^3 = 5.$$

Р е ш е н и е. Пользуясь свойством (4), приведем все логарифмы к основанию 2; учитывая свойство (3), получим

$$\frac{1}{2}\log_2 x - \frac{1}{4}\log_2 x + \log_2 x = 5,$$

откуда $\frac{5}{4}\log_2 x = 5$, $\log_2 x = 4$, $x = 16$.

О т в е т. $\{16\}$.

Иногда после некоторых преобразований уравнение удается привести к виду

$$f(\log_a x) = 0. \qquad (6)$$

Решение уравнения (6) после замены $y = \log_a x$ и отыскания корней уравнения $f(y)=0$ сводится к решению простейших уравнений $\log_a x = y$. Поэтому главная задача — найти преобразования, приводящие исходное уравнение к уравнению вида (6).

П р и м е р 2 (МИИГАиК, 1977). *Решить уравнение*

$$(\log_x 9x^2)\cdot \log_3^2 x = 4.$$

Р е ш е н и е. Переходя к логарифмам по основанию 3, получим равносильное уравнение

$$\frac{\log_3 9x^2}{\log_3 x}\cdot \log_3^2 x = 4,$$

откуда $(2+2\log_3 x)\cdot \log_3 x = 4$. Полагая $y = \log_3 x$, приходим к квадратному уравнению $y^2+y-2=0$, откуда либо $y=-2$, либо $y=1$. Осталось решить простейшие уравнения $\log_3 x = -2$ и $\log_3 x = 1$.

О т в е т. $\left\{\frac{1}{9}, 3\right\}$.

П р и м е р 3. *Решить уравнение*

$$x^{\lg x} = 10^{2\lg^2 x - 3\lg x + 2}.$$

Р е ш е н и е. Здесь x стоит под знаком логарифма, и поэтому $x>0$.

Логарифмируя левую и правую части по основанию 10, получаем равносильное уравнение

$$\lg^2 x = 2\lg^2 x - 3\lg x + 2.$$

Полагая $y = \lg x$, приходим к квадратному уравнению $y^2-3y+2=0$, имеющему корни $y_1=1$ и $y_2=2$.

О т в е т. $\{10, 100\}$.

Довольно часто встречаются также уравнения вида

$$\log_a f(x) = g(x) \qquad (7)$$

или уравнения, приводящиеся к виду (7).

Уравнение (7) равносильно (при $a>1$, $a\neq 1$) уравнению $f(x)=a^{g(x)}$.

П р и м е р 4. *Решить уравнение*
$$\log_3(4\cdot 3^{x-1}-1)=2x-1.$$

Р е ш е н и е. Данное уравнение равносильно следующему:
$$4\cdot 3^{x-1}-1=3^{2x-1}.$$
Сделав замену $y=3^x$, придем к квадратному уравнению
$$y^2-4y+3=0;$$
решая его, находим $y_1=1$, $y_2=3$.

О т в е т. $\{0,1\}$.

Уравнение вида
$$\log_{g(x)}f(x)=a \qquad (8)$$
равносильно системе
$$\begin{cases} f(x)=[g(x)]^a,\\ g(x)>0,\\ g(x)\neq 1.\end{cases} \qquad (8')$$

П р и м е р 5 (МГУ, геолог. ф-т, 1966). *Решить уравнение*
$$\log_{(x+1)}(x^2+x-6)^2=4.$$

Р е ш е н и е. Уравнение равносильно системе
$$\begin{cases} (x^2+x-6)^2=(x+1)^4,\\ x+1>0,\\ x+1\neq 1.\end{cases}$$
Имеем $(x^2+x-6)^2-[(x+1)^2]^2=0$, откуда
$$[x^2+x-6+(x+1)^2][x^2+x-6-(x+1)^2]=0,$$
так что уравнение этой системы равносильно такому:
$$(2x^2+3x-5)(x+7)=0,$$
откуда $x_1=1$, $x_2=-\frac{5}{2}$, $x_3=-7$.

Системе удовлетворяет лишь значение $x=1$.

О т в е т. $\{1\}$.

В некоторых случаях после преобразований исходное уравнение приводится к виду
$$\log_a f(x)=\log_a g(x). \qquad (9)$$
Легко видеть, что всякий корень уравнения (9) удовлетворяет системе
$$\begin{cases} f(x)=g(x),\\ f(x)>0.\end{cases} \qquad (9')$$

Наоборот, если x_0 — решение системы (9′), то $\log_a f(x_0)=\log_a g(x_0)$, так что всякое решение системы (9′) удовлетворяет и уравнению (9). Таким образом, уравнение (9) равносильно системе (9′).

П р и м е р 6. *Решить уравнение*
$$\log_8(7x^2-5x-6)=2\log_4\sqrt[3]{3x-1}.$$

Р е ш е н и е. Приводя логарифмы к основанию 2, получим после упрощений равносильное уравнение
$$\log_2(7x^2-5x-6)=\log_2(3x-1),$$
которое равносильно системе
$$\begin{cases} 7x^2-5x-6=3x-1,\\ 3x-1>0.\end{cases}$$

Решая систему, получим $x=\frac{4+\sqrt{51}}{7}$ $\quad (3x_2-1<0)$.

О т в е т. $\left\{\frac{4+\sqrt{51}}{7}\right\}$.

Отметим теперь некоторые ошибки, допускаемые учащимися при решении логарифмических уравнений.

Чаще всего эти ошибки бывают связаны с неправильными применениями формул для логарифмирования произведения, дроби и степени.

Например, решая уравнение из примера 5, некоторые школьники пишут вот что:

«Из условия следует, что $2\log_{(x+1)}(x^2+x-6)=4$, откуда $x^2+x-6=(x+1)^2$ или $x=-7$. Но $x=-7$ не удовлетворяет исходному уравнению, и поэтому оно корней не имеет».

Причиной потери корня $x=1$ послужило применение формулы $\log_a x^2=2\log_a x$, которая верна лишь при $x>0$. В нашем же случае выражение x^2+x-6 при $x=1$ отрицательно.

Здесь следовало бы воспользоваться формулой $\log_a x^2=2\log_a|x|$, которая верна при всех $x\neq 0$.

Еще один пример. Решая уравнение
$$\log_2[(x+1)(x-3)]=$$
$$=2\log_4(x+8)-\log_{\frac{1}{2}}[(x+1)(x-5)],$$
ученик привел его к виду
$$\log_2(x+1)+\log_2(x-3)=$$
$$=\log_2(x+8)+\log_2(x+1)+$$
$$+\log_2(x-5),$$
или
$$\log_2(x-3)=\log_2[(x+8)(x-5)]. \qquad (10)$$
После этого он получил квадратное уравнение $x^2+2x-37=0$, откуда нашел $x_1=-1+\sqrt{38}$, $x_2=-1-\sqrt{38}$.

Второй корень ученик отбросил как не удовлетворяющий уравнению (10) и получил ответ $x=-1+\sqrt{38}$.

В чем здесь ошибка? Формула $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$ верна лишь при $x>0$ и $y>0$. Поэтому при логарифмировании произведения и произошла потеря корня $x=-1-\sqrt{38}$, который, на самом деле, исходному уравнению удовлетворяет.

Чтобы убедиться в этом, заметим, что исходное уравнение равносильно системам

$$\begin{cases} \log_2(x+1)(x-3)= \\ =\log_2(x+8)(x+1)(x-5), \\ x+8>0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)(x-3)= \\ =(x+8)(x+1)(x-5), \\ x+8>0, \\ (x+1)(x-3)>0. \end{cases}$$

Решения последней системы — $\{-1-\sqrt{38}, -1+\sqrt{38}\}$.

Применение формул $\log_a u^2=2\log_a u$ и $\log_a uv=\log_a u+\log_a v$ «справа налево», вообще говоря, приводит к *расширению* области определения уравнения, что может повлечь за собой *приобретение* посторонних корней. В тех случаях, когда корни полученного уравнения достаточно просты и проверка не обременительна, вовсе не обязательно выписывать системы уравнений и неравенств. Можно переходить к уравнениям-следствиям и в конце решения делать проверку.

Пример 7. *Решить уравнение*

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)-\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7-x)=1.$$

Решение. Переходя к логарифмам по основанию 2 и перенося часть слагаемых в правую часть, приходим к уравнению

$$2\log_2(7-x)=1+\log_2(x-1)+\log_2(x+1),$$

откуда получаем уравнение-следствие

$$(7-x)^2=2(x^2-1),$$

или

$$x^2+14x-51=0.$$

Корни этого квадратного уравнения $x_1=3$, $x_2=-17$.

Второй корень, очевидно, не удовлетворяет данному уравнению. Подставляя в него значение $x=3$, убеждаемся, что $x=3$ — действительно его корень.

Ответ. $\{3\}$.

Наконец, приведем еще пример того, как учащиеся теряют корни при использовании формулы перехода к другому основанию.

Пример 8. *Решить уравнение*

$$\log_{2x} x+\log_{8x^2} x=0.$$

«Решение». Переходя к основанию x, получим

$$\frac{1}{\log_x 2+1}+\frac{1}{2+3\log_x 2}=0.$$

Положив $y=\log_x 2$, получим уравнение

$$\frac{1}{y+1}+\frac{1}{3y+2}=0.$$

Это уравнение имеет корень $y=-\frac{3}{4}$. Поэтому $\log_x 2=-\frac{3}{4}$, откуда

$$x_1=2^{-\frac{4}{3}}=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}.$$

Значение $x=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$ удовлетворяет уравнению. Однако легко видеть, что и значение $x=1$ является его корнем. В чем же дело?

Корень $x=1$ был потерян при переходе к основанию x, поскольку формула (6) справедлива при $x>0$, $x\neq 1$.

Такое решение можно «спасти», сразу заметив, что $x=1$ удовлетворяет уравнению, а при остальных x решать так, как это и было сделано.

Ответ. $\left\{1, \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\right\}$.

Вообще говоря, лучше избегать переходов к основаниям, зависящим от x. Если все же приходится переходить к таким основаниям, то нужно очень внимательно следить за тем, при каких x преобразование возможно, и проверять прямой подстановкой в исходное уравнение те значения x, при которых основание равно 1 или отрицательно.

Так, решая последнее уравнение, лучше перейти к основанию 2. В результате получим

$$\frac{\log_2 x}{1+\log_2 x}+\frac{\log_2 x}{2+3\log_2 x}=0,$$

или, после замены $y=\log_2 x$,

$$\frac{y}{1+y}+\frac{y}{2+3y}=0.$$

Решая это уравнение, найдем корни $y_1=0$, $y_2=-\frac{4}{3}$, после чего без труда получим прежний ответ.

Теперь рассмотрим две задачи, при решении которых используются свойства монотонности некоторых функций.

Пример 9. *Решить уравнение*

$$\log_5(x+3)=3-x.$$

Решение. Легко проверить, что $x=2$ является корнем данного уравнения. Других корней оно, очевидно, не имеет, поскольку функция $\log_5(x+3)$ возрастает во всей своей области определения, а функция $y=3-x$ — убывает.

Ответ. $\{2\}$.

Пример 10. *Решить уравнение*

$$(x+1)\log_3^2 x+4x\log_3 x-16=0.$$

Решение. Положим $y=\log_3 x$ и решим относительно y квадратное уравнение

$$(x+1)y^2+4xy-16=0.$$

Получаем $y=\frac{4}{x+1}$, либо $y=-4$. Осталось решить два уравнения:

$$\log_3 x=\frac{4}{x+1} \text{ и } \log_3 x=-4.$$

Второе из этих уравнений легко решается, а для решения первого достаточно заметить, что $x=3$ удовлетворяет уравнению и функция, стоящая в левой части, возрастает при $x>0$, а функция, стоящая в правой части,— убывает.

Ответ. $\left\{\frac{1}{81};3\right\}$.

В заключение рассмотрим уравнение, которое решается из других соображений.

Пример 11. *Решить уравнение*

$$3x^2-2x^3=\log_2(x^2+1)-\log_2 x.$$

Решение. Правая часть уравнения определена при $x>0$ и равна $\log_2\left(x+\frac{1}{x}\right)$. Поскольку $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$ при $x>0$; $\log_2\left(x+\frac{1}{x}\right)\geqslant 1$. С другой стороны, $3x^2-2x^3\leqslant 1$ при $x>0$ (в этом можно убедиться, например, исследовав функцию с помощью производной). $\log_2\left(x+\frac{1}{x}\right)=1$ при $x=1$. Поскольку $3x^2-2x^3$ тоже равно 1 при $x=1$, левая часть равна правой только при $x=1$.

Ответ. $\{1\}$.

Упражнения

Решите уравнения:

1. $\log_4 x+\log_2 x+2\log_{16} x=5.$
2. (МГУ, геолог. ф-т, 1974)
$$\log_{16}(x^2-2x-3)^2-2\log_{16}(x^2+x-2)=\frac{1}{2}.$$
3. (МГУ, ф-т почвоведения, 1974)
$$\left[(\log_2 x)^2+2\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2\sqrt{2}}\right](3\log_8 x-1)=2\left(\log_2\frac{x}{2}\right)\log_2 x^2.$$
4. (МГУ, эконом. ф-т, отделение политэкономии, 1979)
$$\log_{(3-4x^2)}(9-16x^4)=2+\frac{1}{\log_2(3-4x^2)}.$$
5. (МГУ, ф-т психологии, 1978)
$$\left(\log_3\frac{3}{x}\right)\log_2 x-\log_3\frac{x^3}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}+\log_2\sqrt{x}.$$
6. (МГУ, эконом. ф-т, отделение эконом. кибернетики, 1978)
$$3+\frac{1}{\log_{32}\frac{x}{2}}=\log_{\frac{x}{2}}\left(\frac{75x}{4}-\frac{11}{x}\right).$$
7. (МГУ, эконом. ф-т, отделение политэкономии, 1979)
$$\log_{(2x+1)}(5+8x-4x^2)+\log_{(5-2x)}(1+4x+4x^2)=4.$$
8. (МВТУ, 1979)
$$0{,}5\lg(2x-1)+\lg\sqrt{x-9}=1.$$
9. (МГУ, ф-т почвоведения, 1979)
$$x^2\log_6\sqrt{5x^2-2x-3}-x\log_{\frac{1}{6}}(5x^2-2x-3)=x^2+2x.$$
10. (МГУ, химфак, 1972)
$$\log_{(x^2+6x+8)}(\log_{(2x^2+2x+3)}(x^2-2x))=0.$$
11. (МГУ, физфак, 1975)
$$6^{\log_{\frac{1}{6}}(x+3)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_4(x^2+5x+12)}$$
12. $\log_2^2 x+(x-1)\log_2 x=6-2x.$
13. $3^x=10-\log_2 x.$
14. $\log_{0.5} x^2-14\log_{16x} x^3+40_{4x}\sqrt{x}=0.$

А. Буздин, В. Тугушев

Закон сохранения энергии для тепловых процессов

При решении задач, связанных с рассмотрением тепловых процессов, важнейшую роль играет закон сохранения и превращения энергии, называемый первым законом термодинамики:

$$Q=\Delta U+A.$$

Здесь Q — количество теплоты, переданное системе, ΔU — изменение ее внутренней энергии и A — работа, совершаемая системой против внешних сил. (В учебном пособии «Физика 9» эта работа обозначена A', для краткости мы «штрих» будем опускать.)

Внутренняя энергия U является функцией термодинамических параметров (давления p, объема V и температуры T), описывающих состояние системы, но не зависит от того, каким образом это состояние возникло. Например, для одноатомного идеального газа

$$U=\frac{m}{\mu}\frac{3}{2}RT,$$

где m — масса газа, μ — его молярная масса, R — универсальная газовая постоянная, равная 8,31 Дж/(моль · К).

Работа A, совершаемая системой, зависит, разумеется, от характера теплового процесса. Так, при небольшом изменении объема ΔV (когда давление можно считать постоянным)

$$A=p\Delta V.$$

Термодинамические параметры системы не являются независимыми переменными, они связаны уравнением состояния. В случае идеального газа это уравнение Менделеева — Клапейрона

$$pV=\frac{m}{\mu}RT.$$

Рассмотрим некоторые типичные задачи на тепловые процессы, предлагавшиеся на вступительных экзаменах.

Задача 1 (МЭИ, 1978 г.). *Над одним молем идеального газа совершают тепловой процесс, изображенный на рисунке 1. Как менялась температура газа на участках 1—2, 2—3, 3—1? На каких участках газ получал, а на каких отдавал тепло?*

Для участка *1—2* зависимость давления от объема — линейная: $p=\alpha V$ (α — некоторый постоянный коэффициент). Из уравнения Менделеева — Клапейрона в этом случае имеем

$$\alpha V^2=RT.$$

Это означает, что температура газа возрастала пропорционально квадрату объема и его внутренняя энергия увеличилась: $\Delta U>0$. Кроме того, газ совершал положительную работу по расширению: $A>0$. Из первого закона термодинамики следует, что количество теплоты

$$Q_{1-2}=\Delta U+A>0$$

— на участке *1—2* газ получал тепло.

На участке *2—3* $V_2=V_3=\text{const}$, то есть работа газом не совершалась: $A=0$. Давление газа падало: $p_3<p_2$; значит, $T_3<T_2$ и $\Delta U<0$. Поэтому на участке *2—3* газ отдавал тепло: $Q_{2-3}<0$.

На участке *3—1* $p_1=p_3=\text{const}$, объем газа уменьшался от V_3 до

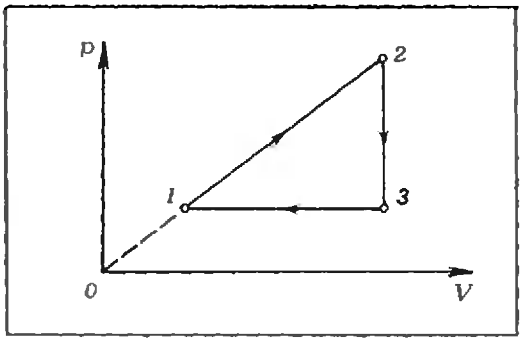


Рис. 1.

V_1 и температура газа падала от T_3 до T_1. Следовательно, $A<0$ и $\Delta U<0$. В итоге $Q_{3-1}<0$ — газ отдавал тепло.

З а д а ч а 2 (физической факультет МГУ, 1979 г.). *Идеальный газ совершает работу. При этом состояние газа меняется по замкнутому циклу, состоящему из двух изохор и двух изобар (рис. 2). Температуры газа в точках 1 и 3 равны соответственно T_1 и T_3. Определите работу, совершаемую одним молем газа, если известно, что точки 2 и 4 лежат на одной изотерме.*

На участках *1—2* и *3—4* работа не совершается, так как объем газа не меняется. На участке *2—3* газ совершает работу, равную $p_2(V_3-V_2)$. Эта работа положительна, поскольку газ расширяется. На участке *4—1* совершаемая газом работа отрицательна (газ сжимается) и равна $-p_4(V_4-V_1)$. Полная работа за цикл равна

$$A=p_2(V_3-V_2)-p_4(V_4-V_1)=(p_2-p_4)(V_3-V_2),$$

или, с учетом равенств $p_1=p_4$, $p_2=p_3$ и $V_2=V_1$,

$$A=(p_3-p_1)(V_3-V_1)=p_3V_3-p_1V_3-p_3V_1+p_1V_1.$$

Заметим, что искомая работа численно равна площади фигуры, ограниченной графиком циклического процесса в координатах p,V. Это общий результат, справедливый для любого процесса.

Уравнение Менделеева — Клапейрона для одного моля газа дает

$$p_1V_1=RT_1 \text{ и } p_3V_3=RT_3.$$

Из условия, что точки *2* и *4* лежат на одной изотерме, получаем

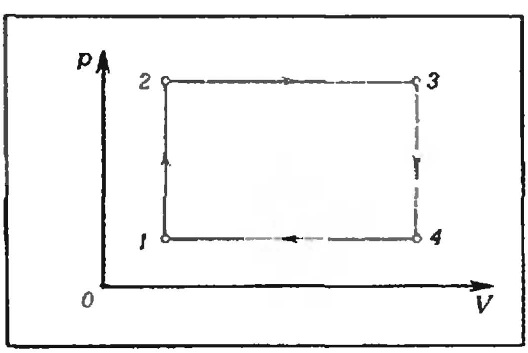


Рис. 2.

$$p_2V_2=p_4V_4, \text{ или } p_3V_1=p_1V_3.$$

В соответствии с этим

$$(p_3V_1)^2=(p_3V_1)(p_1V_3)=(p_3V_3)(p_1V_1)=R^2T_1T_3,$$

откуда

$$p_3V_1=p_1V_3=R\sqrt{T_1T_3}.$$

Тогда окончательно

$$A=RT_3-2R\sqrt{T_1T_3}+RT_1=R(\sqrt{T_3}-\sqrt{T_1})^2.$$

* * *

В ряде задач на тепловые явления используется понятие теплоемкости. Теплоемкость тела C определяется как отношение сообщенного телу количества теплоты Q к изменению температуры тела ΔT:

$$C=\frac{Q}{\Delta T}.$$

Хотелось бы подчеркнуть, что теплоемкость существенно зависит от того, каким именно образом телу сообщается тепло. В частности, различают теплоемкости при постоянном объеме C_V и при постоянном давлении C_p. Найдем, как связаны между собой молярные теплоемкости (теплоемкости одного моля) C_p и C_V идеального газа.

Нагреем моль газа на ΔT градусов один раз изохорически, а другой раз — изобарически. Из первого закона термодинамики следует, что необходимое количество теплоты $Q=\Delta U+A$. В случае изохорного процесса ($V=\text{const}$) газ работы не совершает: $A=0$, поэтому

$$Q_1=\Delta U \text{ и } C_V=\frac{Q_1}{\Delta T}=\frac{\Delta U}{\Delta T}.$$

При изобарном процессе ($p=\text{const}$) $A=p\Delta V=R\Delta T$ (мы использовали уравнение Менделеева — Клапейрона для одного моля газа), а изменение внутренней энергии ΔU — такое же, как и в первом случае. Следовательно,

$$Q_2=\Delta U+R\Delta T \text{ и } C_p=\frac{\Delta U}{\Delta T}+R.$$

Таким образом,

$$C_p=C_V+R.$$

Теперь разберем три конкретные задачи.

З а д а ч а 3 (МФТИ, 1976 г.). *Один моль идеального газа, первоначально находившегося при нор-*

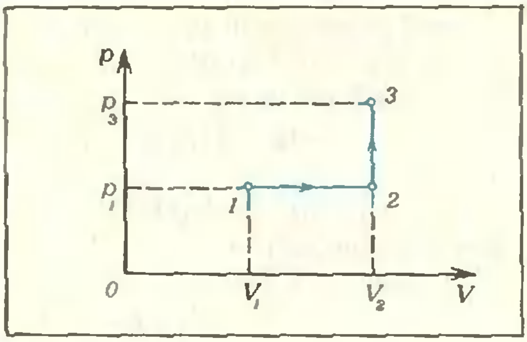


Рис. 3.

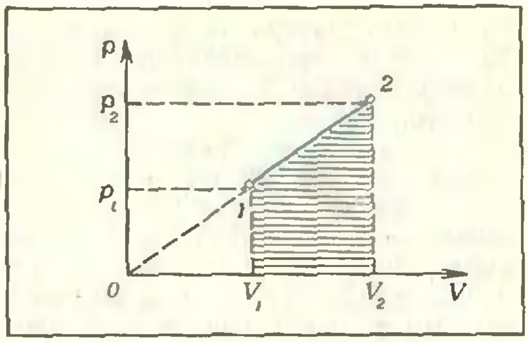


Рис. 4.

мальных условиях, переводят в состояние с вдвое бо́льшими объемом и давлением. Процесс перевода слагается из двух участков — изобары и изохоры. Какое количество теплоты было подведено к газу? Теплоемкость газа $C_V = 21$ Дж/(моль · К).

Изобразим рассматриваемый процесс в координатах p, V (рис. 3). На участке *1—2* давление остается постоянным, а объем возрастает в два раза ($V_2 = 2V_1$). Согласно закону Гей-Люссака, температура в точке *2* будет $T_2 = 2T_1$. На участке *2—3* сохраняется постоянным объем газа, но вдвое увеличивается давление. По закону Шарля температура в точке *3* будет равна $T_3 = 2T_2 = 4T_1$.

Зная температуры газа в точках *1*, *2*, *3* (по условию в точке *1* газ находится при нормальных условиях, то есть $T_1 = 273$ К), нетрудно найти подведенное к газу количество теплоты:

при изобарном процессе *1—2* газ получил количество теплоты

$$Q_1 = C_p(T_2 - T_1) = (C_V + R)T_1;$$

при изохорном процессе *2—3* газу сообщили количество теплоты

$$Q_2 = C_V(T_3 - T_2) = 2C_VT_1;$$

полное количество теплоты, подведенное к газу, равно

$$Q = Q_1 + Q_2 = (3C_V + R)T_1 \approx 20 \text{ кДж}.$$

З а д а ч а 4 (МЭИ, 1977 г.). *Один моль газа расширяется так, что его объем во время процесса пропорционален давлению: $V = \alpha p$. Давление газа увеличивается от p_1 до p_2. Найдите коэффициент α, если теплоемкость моля газа при постоянном объеме равна C_V и во время процесса газу сообщается количество теплоты Q.*

Используя первое начало термодинамики, запишем

$$Q = \Delta U + A.$$

Изменение внутренней энергии газа

$$\Delta U = C_V \Delta T,$$

где ΔT — изменение температуры. В случае процесса, при котором $V = \alpha p$, уравнение газового состояния имеет вид $\alpha p^2 = RT$. Тогда

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{\alpha}{R}(p_2^2 - p_1^2)$$

и

$$\Delta U = \frac{C_V\alpha}{R}(p_2^2 - p_1^2).$$

Для нахождения работы A, совершенной газом, удобно использовать графический метод (рис. 4): работа равна площади заштрихованной области, то есть

$$A = \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1) = \alpha\frac{p_2^2 - p_1^2}{2}.$$

Таким образом,

$$Q = \Delta U + A = \left(\frac{C_V}{R} + \frac{1}{2}\right)\alpha(p_2^2 - p_1^2).$$

Решая это уравнение относительно α, получаем

$$\alpha = \frac{Q}{(C_V/R + 1/2)(p_2^2 - p_1^2)}.$$

З а д а ч а 5 (МФТИ, 1980 г.). *При одинаковом изменении температуры количества теплоты, подведенные к одной и той же порции идеального газа один раз при постоянном давлении, а другой раз при постоянном объеме, отличаются на $\Delta Q = 7$ Дж. Определите изменение внутренней энергии газа при этих процессах. Коэффициент пропорциональности C_V между температу-*

рой и внутренней энергией одного моля данного газа равен 20,75 Дж/(моль · К), газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль · К).

Внутренняя энергия определенной порции идеального газа зависит только от его температуры, поэтому ее изменение в обоих процессах будет одинаковым и равным $\Delta U=\nu C_V\Delta T$, где ν — число молей газа, ΔT — изменение его температуры.

Количество теплоты, подведенное к газу при изохорном процессе, равно

$$Q_1=\nu C_V\Delta T,$$

а количество теплоты, подведенное при изобарном процессе, равно

$$Q_2=\nu C_p\Delta T=\nu(C_V+R)\Delta T.$$

Значит,

$$\Delta Q=Q_2-Q_1=\nu R\Delta T,$$

откуда находим

$$\Delta U=\frac{\Delta Q C_V}{R}\approx 17 \text{ Дж}.$$

* * *

Циклические тепловые процессы лежат в основе работы тепловых машин, важной характеристикой которых является коэффициент полезного действия (КПД). Рассмотрим задачу на расчет этой величины.

Задача 6 (физический факультет МГУ, 1976 г.). *Тепловая машина имеет КПД $\eta=40\%$. Каким станет КПД машины, если количество теплоты, потребляемое за цикл, увеличится на 20%, а количество теплоты, отдаваемое холодильнику, уменьшится на 10%?*

По определению коэффициент полезного действия равен отношению работы A, совершаемой тепловой машиной за цикл, к величине получаемого ею количества теплоты $Q_п$. Из закона сохранения энергии следует, что совершаемая работа равна разности получаемого количества теплоты и количества теплоты $Q_{от}$, отдаваемого тепловой машиной холодильнику. Таким образом,

$$\eta=\frac{A}{Q_п}=\frac{Q_п-Q_{от}}{Q_п}=1-\frac{Q_{от}}{Q_п}.$$

Отсюда нетрудно найти, что вначале, когда КПД машины составлял 40%, отношение $Q_{от}/Q_п$ было равно 0,6. Затем, по условию задачи, ко-

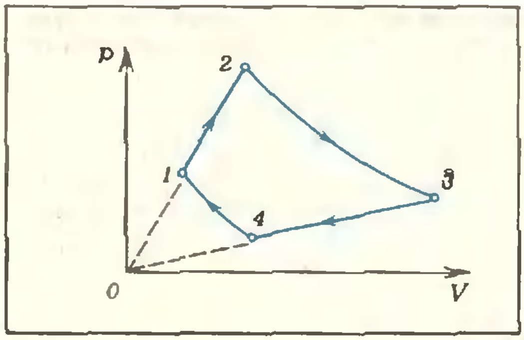


Рис. 5.

личество теплоты, потребляемое за цикл, увеличилось на 20%, то есть стало равным $Q'_п=1{,}2Q_п$, а отдаваемое холодильнику количество теплоты уменьшилось на 10%, то есть стало равным $Q'_{от}=0{,}9Q_{от}$. Значит, новое значение КПД

$$\eta'=1-\frac{Q'_{от}}{Q'_п}=1-\frac{0{,}9Q_{от}}{1{,}2Q_п}=0{,}55.$$

Мы нашли, таким образом, что КПД тепловой машины увеличился и стал равным 55%.

Упражнения

1. В цилиндрическом сосуде под невесомым поршнем находится газ при температуре $t=20°C$. Газ занимает объем $V=1$ л. При увеличении температуры газа на $\Delta t=10°C$ поршень поднимается. Найдите работу A, совершенную газом. Атмосферное давление $p_0=10^5$ Па, трение поршня о стенки сосуда отсутствует.

2. Какое количество теплоты необходимо подвести молю идеального газа при нагревании его на 1°С в тепловом процессе, в котором давление p и объем V связаны соотношением $p=aV$, где a — некоторая постоянная. Молярную теплоемкость газа при постоянном объеме C_V принять равной $5/2R$.

3. Некоторая масса газа имеет давление p_0, объем V_0 и температуру T_0. Затем газ при постоянном объеме нагревают до температуры $T_1=2T_0$, после этого происходит расширение газа при постоянном давлении до объема $V_2=4V_0$. Из получившегося состояния газ возвращают к начальному (p_0, V_0, T_0), причем так, что во время этого процесса $pV^n=\text{const}$. Определите n.

4. На рисунке 5 изображен график циклического теплового процесса в координатах p, V. Участки 2—3 и 4—1 соответствуют изотермическим процессам. Определите, как менялась температура идеального газа. На каких участках газ отдавал, а на каких поглощал тепло?

5. Температура некоторой массы m идеального газа с молярной массой μ меняется по закону $T=aV^2$, где a — постоянная величина. Найдите графически работу, совершаемую газом при увеличении объема от V_1 до V_2. Поглощается или выделяется при этом тепло?

Московский физико-технический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$10\cos^2 x - 16\sin x = \cos 2x + 15.$$

2. На координатной плоскости дан круг радиуса $\sqrt{7}$ с центром в точке $(2; 3)$. Найти все точки вне этого круга, координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} 3^x + 3^{y-\frac{1}{2}} = 4, \\ (2x-y)^2 = \frac{9}{4}. \end{cases}$$

3. Длины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ равны соответственно 8 см и 10 см, а длина основания BC равна 2 см. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найти площадь трапеции.

4. Высота правильной четырехугольной пирамиды вдвое больше диагонали ее основания, объем пирамиды равен V. Рассматриваются правильные четырехугольные призмы, вписанные в пирамиду так, что их боковые ребра параллельны диагонали основания пирамиды, одна боковая грань принадлежит этому основанию, вершины противоположной боковой грани лежат на боковой поверхности пирамиды. Найти:

а) объем той призмы, плоскость боковой грани которой делит высоту пирамиды в отношении 4:1, считая от вершины;

б) наибольшее значение объема рассматриваемых призм.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2y - xy^5z = z^2, \\ xz + 3y^4z^2 = 10x^2y^5, \\ 5y^4z + 3xy^8z^2 = 2x^2. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x - 32\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2-1} < 0.$$

2. Решить уравнение

$$\log_{\cos x}\left(\frac{\sin 2x}{\sqrt{2}} + \cos x - \sin^2 x - \sqrt{2}\sin x\right) = 2.$$

3. В круге проведены две взаимно перпендикулярные и пересекающиеся хорды AB и CD. Известно, что $|AB| = |BC| = |CD|$. Установить, что больше: площадь круга или площадь квадрата со стороной AB.

4. Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2^x(y+1)(1-y\cdot 2^x) = a^3, \\ (1+2^x)(1-y\cdot 2^x) = a \end{cases}$$

а) не имеет решений;

б) имеет конечное множество решений;

в) имеет бесконечное множество решений.

В случаях б), в) найти все решения.

5. Длина стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, длина апофемы пирамиды равна $\frac{3}{2}a$. Ортогональной проекцией пирамиды на плоскость, перпендикулярную одной из боковых граней, является равнобедренная трапеция. Найти площадь этой трапеции.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$2x - \sqrt{x^3 + 2x^2 - 3x} = 0.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{\frac{x-1}{5x-6}}(\sqrt{6} - 2x) < 0.$$

3. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Расстояние от центра окружности до точки пересечения диагоналей трапеции относится к радиусу как 3 к 5. Найти отношение периметра трапеции к длине вписанной окружности.

4. На координатной плоскости рассматривается множество N всех точек, координаты $(a; b)$ которых удовлетворяют условиям $a < b$, $|a| < 3$, $|b| < 3$ и таковы, что уравнение

$$(a^3 - b^3)x^4 + (3a + b)x^2 + \frac{1}{a-b} = 0$$

не имеет корней.

а) Принадлежит ли точка $P(-2; -1)$ множеству N?

б) Найти площадь многоугольника, внутренней областью которого является множество N.

5. На ребре BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка F так, что $|B_1F| = \frac{1}{3}|BB_1|$, на ребре C_1D_1 — точка E так, что $|D_1E| = \frac{1}{3}|C_1D_1|$. Какое наибольшее значение может принимать отношение $\frac{|AP|}{|PQ|}$, где точка P лежит на луче (DE), а точка Q — на прямой A_1F?

Решение задач варианта 1

1. Выразив $\cos^2 x$ и $\cos 2x$ через $y = \sin x$, получим систему

$$\begin{cases} 4y^2 + 8y + 3 = 0, \\ |y| \leqslant 1, \end{cases}$$

откуда $y = -\frac{1}{2}$. Осталось решить уравнение $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Ответ. $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$ $(n\in Z)$.

Эта задача очень проста, однако некоторые абитуриенты не сумели правильно ее решить. Основная ошибка состояла в том, что они не отбрасывали второй корень $y=-\frac{3}{2}$ квадратного уравнения и рассматривали выражение $\arcsin\left(-\frac{3}{2}\right)$. Плохое знание обратных тригонометрических функций было также заметно и на устном экзамене.

2. Из второго уравнения сразу получаем, что либо $y=2x-\frac{3}{2}$, либо $y=2x+\frac{3}{2}$.

В первом случае получаем уравнение $3^x+3^{2x-2}=4$, которое заменой $z=3^{x-1}$ приводится к квадратному уравнению $z^2+3z-4=0$ с корнями $z_1=-4$, $z_2=1$.

Так как $z>0$, получаем $3^{x-1}=1$, откуда $x=1$, $y=\frac{1}{2}$.

Во втором случае, как и в первом, приходим к уравнению $3z^2+z-4=0$, где $z=3^x$; решая его, находим $x=0$, $y=\frac{3}{2}$.

Найденные решения могут быть изображены на координатной плоскости точками $M\left(1;\frac{1}{2}\right)$ и $N\left(0;\frac{3}{2}\right)$. Расстояние от точки M до центра $O(2;3)$ данного круга равно $|OM|=\sqrt{(1-2)^2+\left(\frac{1}{2}-3\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{29}>\sqrt{7}$.

Точно так же $|ON|=\sqrt{(0-2)^2+\left(\frac{3}{2}-3\right)^2}=$

$=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}<\sqrt{7}$.

Таким образом, вне круга лежит лишь точка M.

Ответ. $\left\{\left(1;\frac{1}{2}\right)\right\}$.

При решении этой задачи некоторые абитуриенты не смогли правильно записать условие того, что точка $(x;y)$ лежит вне заданного круга.

3. Пусть E — середина отрезка AB. Проведем среднюю линию EF трапеции $ABCD$. Поскольку $\widehat{ADE}=\widehat{DEF}$, $(EF)\parallel(AD)$ и $\widehat{ADE}=\widehat{EDF}$ (по условию), получаем $\widehat{DEF}=\widehat{EDF}$, то есть треугольник EFD — равнобедренный. Значит, $|EF|=|FD|=\frac{1}{2}|CD|=5$. Поэтому $|AD|=2|EF|-|BC|=8$. Проведем отрезок BG, параллельный стороне CD (рис. 1). Имеем $|BG|=10$; $|AG|=|AD|-|DG|=|AD|-|BC|=6$ ($BCDG$ — параллелограмм). Зная длины сторон треугольника ABG, можно вычислить угол BAG. По теореме косинусов

$$\cos(\widehat{BAG})=\frac{|BG|^2-|AB|^2-|AG|^2}{2|AB||AG|}=$$

$$=\frac{100-64-36}{2\cdot 8\cdot 6}=0,$$

то есть $\widehat{BAG}=90°$. Значит, AB — высота трапеции $ABCD$, а площадь трапеции равна $8\cdot 5=40$.

Ответ. 40 см².

К сожалению, лишь немногие из абитуриентов нашли приведенное здесь простое геометрическое решение. Некоторые пытались решить задачу с помощью векторов, другие вводили большое количество новых параметров (например, углы трапеции) и многократно применяли теорему косинусов, третьи пользовались теоремой об отношении, в котором делит сторону треугольника основание биссектрисы.

4. Обозначим точки пересечения плоскости «верхней» боковой грани призмы с боковыми ребрами пирамиды $SABCD$ через A_1, B_1, C_1, D_1 (рис. 2), а точку пересечения высоты SO пирамиды с этой плоскостью — через O_1. Обозначим длину ребра EH через b, длину стороны EE_1 основания призмы через a, высоту пирамиды $SABCD$ через H. Пусть точка O_1 делит высоту в отношении λ: $\frac{|O_1O|}{|SO|}=\lambda$ (ясно, что $\lambda\in]0;1[$).

Поскольку $|O_1O|=|E_1E|=a$, имеем $a=\lambda H$. Рассмотрим квадрат $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 3). Из условия задачи следует, что отрезки F_1G, E_1H_1 и A_1C_1 попарно параллельны. Найдем длину диагонали A_1C_1. Из подобия треугольников ASC и A_1SC_1 имеем $\frac{|A_1C_1|}{|AC|}=\frac{|SO_1|}{|SO|}$, откуда

$$|A_1C_1|=\frac{H}{2}\cdot\frac{H-\lambda H}{H}=(1-\lambda)\frac{H}{2}.$$

Найдем длину b бокового ребра F_1H_1 призмы:

$b=|A_1C_1|-2|KE_1|=|A_1C_1|-|E_1F_1|=$

$$=(1-\lambda)\frac{H}{2}-\lambda H=(1-3\lambda)\frac{H}{2}.$$

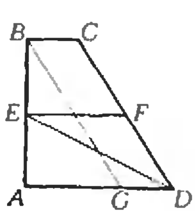


Рис. 1.

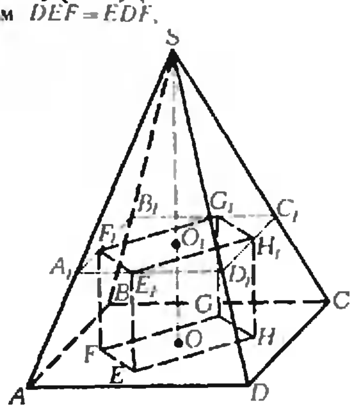


Рис. 2.

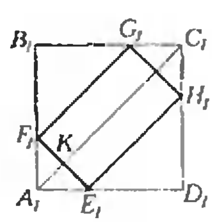


Рис. 3.

Объем $V_{пр}$ призмы $EFGHE_1F_1G_1H_1$ равен $V_{пр}=a^2b=\lambda^2(1-3\lambda)\frac{H^3}{2}$. Поскольку $\frac{1}{24}H^3=V$, окончательно получаем

$$V_{пр}=12\lambda^2(1-3\lambda)V,$$

где $\lambda\in]0;1[$.

Теперь можно ответить на вопрос а). Значение λ в этом случае равно $\frac{1}{1+4}=\frac{1}{5}$, и поэтому $V_{пр}=\frac{24}{125}V$.

Для того чтобы ответить на вопрос б), найдем максимум функции $V_{пр}(\lambda)$ на интервале $]0;1[$. Приравняем нулю производную $V'_{пр}(\lambda)=2\lambda-9\lambda^2=0$, откуда $\lambda=\frac{2}{9}$. Так как при $\lambda<\frac{2}{9}$ $V'_{пр}(\lambda)>0$, а при $\lambda>\frac{2}{9}$ $V'_{пр}(\lambda)<0$ функция $V_{пр}(\lambda)$ имеет при $\lambda=\frac{2}{9}$ наибольшее значение на интервале $]0;1[$, равное $V_{пр}\left(\frac{2}{9}\right)=\frac{16}{81}V$.

Ответ. а) $\frac{24}{125}V$; б) $\frac{16}{81}V$.

Многие из абитуриентов не сумели правильно выбрать тот параметр, через который выражается объем призмы, хотя в условии а) имеется на этот счет явная подсказка. При исследовании функции $V_{пр}(\lambda)$ на экстремум лишь немногие абитуриенты доказали, что при $\lambda=\frac{2}{9}$ имеет место именно максимум.

5. Умножив первое уравнение на $5y^4$ и сложив с вторым, получим

$$2y^4z^2=-5xy^9z+xz. \qquad (1)$$

Возможны два случая: $z=0$ и $z\neq0$. В первом случае из третьего уравнения получим $x=0$, а значения y могут при этом быть любыми. Получаем бесконечное множество решений: $(0, \alpha, 0)$, $\alpha\in\mathbf{R}$.

Если $y=0$, то из третьего и первого уравнений получаем $x=0$ и $z=0$, то есть одно из уже найденных решений. Если же $x=0$, то из первого уравнения $z=0$ и вновь мы приходим к решениям $(0, \alpha, 0)$, $\alpha\in\mathbf{R}$.

Пусть теперь $z\neq0$, $y\neq0$, $x\neq0$. Из (1) получаем

$$z=\frac{x-5xy^9}{2y^4}. \qquad (2)$$

Подставив это соотношение в первое уравнение системы, получим после преобразований уравнение

$$15y^{18}-16y^9+1=0.$$

Положим $t=y^9$. Решая уравнение $15t^2-16t+1=0$, получаем $t_1=1$, $t_2=\frac{1}{15}$, откуда $y_1=1$, $y_2=(15)^{-1/9}$.

Из соотношения (2) получаем

$$y_1^4z=x\left(\frac{1-5y^9}{2}\right)=-2x$$

в первом случае и

$$y_2^4z=x\left(\frac{1-1/3}{2}\right)=\frac{x}{3}$$

во втором.

Разберем первый случай. Подставив y^4z в третье уравнение, получим $12x^2-2x-10=0$, откуда $x_1=-\frac{5}{6}$, $x_2=1$. Воспользовавшись соотношением (2), получим два решения: $\left(-\frac{5}{6};1;\frac{5}{3}\right)$, $(1;1;-2)$.

Во втором случае, действуя так же, как и в первом, находим еще два решения: $(1; 15^{-1/9}; 5\cdot15^{-5/9})$, $(5; 15^{-1/9}; 25\cdot15^{-5/9})$.

Ответ. $\{(0;\alpha;0), \alpha\in\mathbf{R}; \left(-\frac{5}{6};1;\frac{5}{3}\right); (1;1;-2); (1; 15^{-1/9}; 5\cdot15^{-5/9}); (5; 15^{-1/9}; 25\cdot15^{-5/9})\}$.

Решение этой задачи требовало некоторой изобретательности, и лишь немногие справились с ней полностью. Однако и те, кто продвинулся в решении задачи достаточно далеко, часто теряли решения $(0;\alpha;0)$, $\alpha\in\mathbf{R}$, указывая лишь $(0,0,0)$. Многие абитуриенты не сумели увидеть полученного ими квадратного уравнения относительно y^9 и не знали, что с ним дальше делать.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. На неподвижный груз массой $m=10$ кг, лежащий на горизонтальном столе и прикрепленный к стене пружиной жесткостью $k=4\cdot10^3$ Н/м, на некоторое время τ прикладывается постоянная сила $\vec{F}$ (рис. 4). При каких значениях τ после прекращения действия силы $\vec{F}$ груз будет снова неподвижным? Трением пренебречь.

2. Цилиндрическую гирю, подвешенную к динамометру, опускают в воду (рис. 5), пока уровень воды в сосуде не изменится на $\Delta h=8$ см. Показание динамометра при этом изменилось на $|\Delta\vec{F}|=0{,}5$ Н. Определите сечение сосуда.

3. На две плоскопараллельные сетки, между которыми приложена разность потенциалов U_0, падает параллельный пучок отрицательно заряженных частиц под углом $\alpha=60°$ (рис. 6). При каких энергиях частицы смогут пройти через сетки, если заряд частиц равен q?

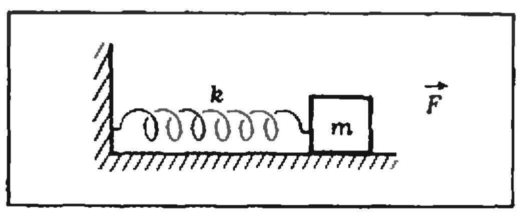


Рис. 4.

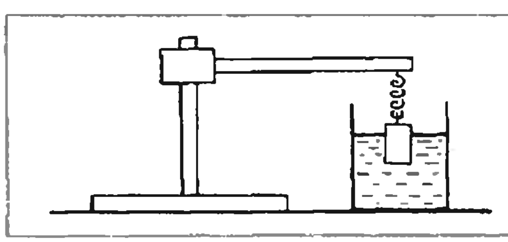


Рис. 5.

4. На некотором расстоянии за тонкой отрицательной линзой с фокусным расстоянием $F_л = 10$ см находится сферическое вогнутое зеркало. Система линза + зеркало создает прямое изображение предмета в натуральную величину. Затем зеркало отодвинули от линзы на $l = 2$ см, при этом вновь получилось изображение предмета в натуральную величину. Определите расстояние от предмета до линзы.

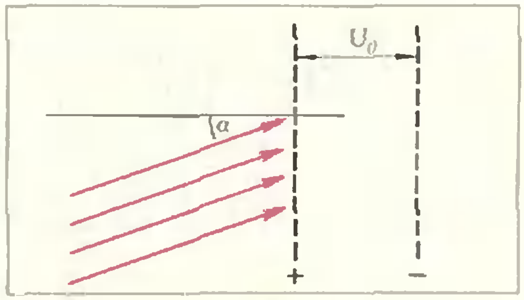


Рис. 6.

Вариант 2

1. Ядерная реакция $^{14}N + ^{4}He \rightarrow ^{17}O + p$ может идти, если налетающие на неподвижные ядра азота α-частицы имеют энергию, превышающую пороговую энергию $E_п = 1{,}45$ МэВ. На сколько энергия α-частиц должна быть больше пороговой, чтобы кинетическая энергия образующихся в реакции протонов была равна нулю?

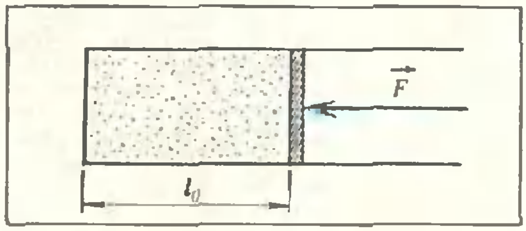


Рис. 7.

2. В горизонтально расположенном цилиндре сечением S находится массивный поршень (рис. 7). В начальный момент поршень удерживается на расстоянии l_0 от дна сосуда, для чего к нему пришлось приложить силу $\vec{F}$. После прекращения действия силы $\vec{F}$ поршень начинает двигаться без трения. На каком расстоянии от дна поршень будет иметь наибольшую скорость? Процесс считать изотермическим. Внешнее давление равно p_0.

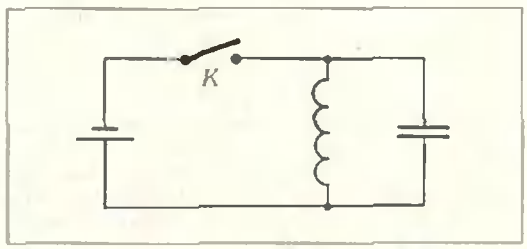


Рис. 8.

3. Колебательный контур, состоящий из катушки индуктивности и конденсатора, через ключ K подключен к источнику постоянной ЭДС с внутренним сопротивлением r (рис. 8). Первоначально ключ K замкнут. После установления стационарного режима ключ размыкают, и в контуре возникают колебания с периодом T. При этом амплитуда напряжения на конденсаторе в n раз больше ЭДС батареи. Найдите индуктивность катушки и емкость конденсатора. Омическим сопротивлением катушки пренебречь.

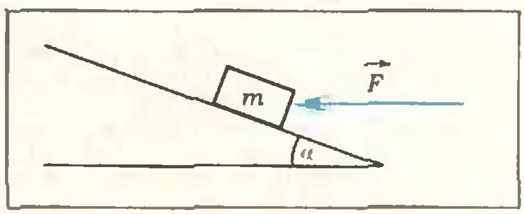


Рис. 9.

4. Предмет и его изображение, создаваемое тонкой положительной линзой, находятся по одну сторону от линзы. Расстояние между предметом и изображением $a_1 = 4$ см. Точно такое же изображение того же предмета получено с помощью сферического зеркала, имеющего такое же, как у линзы, фокусное расстояние. При этом расстояние между предметом и изображением оказалось равным $a_2 = 8$ см. Определите фокусное расстояние линзы.

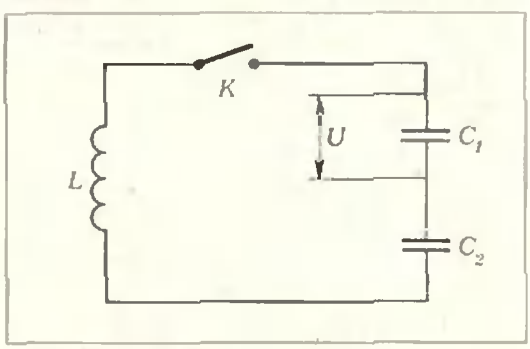


Рис. 10.

Вариант 3

1. С какой минимальной горизонтальной силой $\vec{F}$ надо действовать на брусок массой $m = 1$ кг, находящийся на наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30°$, чтобы брусок покоился (рис. 9)? Коэффициент трения бруска о наклонную плоскость $\mu = 0{,}2$.

2. Из баллона объемом $V_1 = 200$ л, содержащего гелий при температуре $T_1 = 273$ К под давлением $p_1 = 2 \cdot 10^6$ Н/м², израсходовали часть газа, занявшего при нормальных условиях объем $V_2 = 1000$ л. При повторном измерении давления в баллоне получено значение $p_2 = 1{,}4 \cdot 10^6$ Н/м². При какой температуре проведено это измерение?

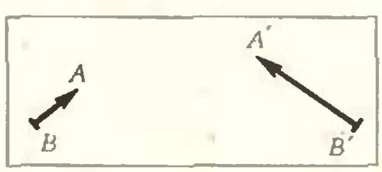


Рис. 11.

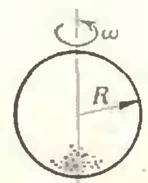


Рис. 12.

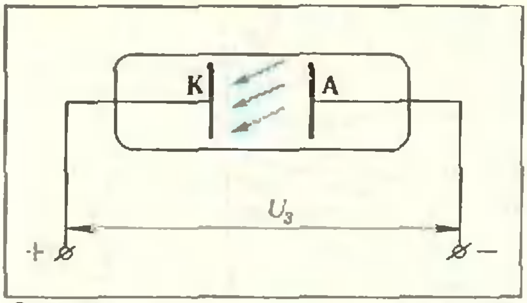


Рис. 13.

3. Цепь, состоящая из двух конденсаторов емкостью C_1 и C_2 и катушки с индуктивностью L, первоначально разомкнута (рис. 10). Конденсатор емкостью C_1 заряжают до разности потенциалов U, а конденсатор емкостью C_2 остается незаряженным. Определите максимальную величину силы тока в цепи после замыкания ключа K. Активным сопротивлением катушки пренебречь.

4. С помощью сферического зеркала получено изображение $A'B'$ предмета AB (рис. 11). Построением определите местоположение зеркала и его фокус.

Вариант 4

1. На дно сферы радиусом R насыпали горсть песка (рис. 12). Определите, где будут находиться песчинки после того, как сферу привели во вращение вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω. Трением песчинок о сферу пренебречь.

2. Плотность раствора соли с глубиной h меняется по закону $\varrho=\varrho_0+Ah$, где $\varrho_0=1$ г/см^3, $A=0{,}01$ г/см^4. В раствор опущены два шарика, связанные нитью длиной $l=5$ см. Объем каждого шарика $V=1$ см^3, а массы $m_1=1{,}2$ г, $m_2=1{,}4$ г. На какой глубине каждый шарик будет находиться в равновесии, если известно, что нить натянута?

3. При исследовании вакуумного фотоэлемента оказалось, что при задерживающей разности потенциалов $U_з=1{,}5$ В между катодом К и анодом А (рис. 13) фототок с поверхности катода, освещаемого светом с длиной волны λ_0, прекращается. Определите λ_0, если работа выхода материалов катода и анода $A=4$ эВ. Постоянная Планка $\hbar=1{,}05\times\times10^{-34}$ Дж·с, заряд электрона $e=1{,}6\times\times10^{-19}$ Кл.

4. За тонкой положительной линзой с фокусным расстоянием $F_1=15$ см расположено выпуклое зеркало с фокусным расстоянием $F_2=5$ см. Эта система создает прямое изображение предмета в натуральную величину независимо от его удаления от линзы. Определите расстояние между линзой и зеркалом. (Зеркало находится между линзой и ее фокусом.)

Решение задач варианта 1

1. Во время действия силы $\vec{F}$ груз совершает гармонические колебания с периодом $T=2\pi\sqrt{m/k}\approx0{,}3$ с около нового положения равновесия, определяемого условием $kx_0=|\vec{F}|$, где x_0 — смещение нового положения равновесия относительно старого. При этом амплитуда колебаний тоже равна $x_0=|\vec{F}|/k$, а правое крайнее положение груза совпадает с его первоначальным положением. Очевидно, что скорость груза и его ускорение в этот момент равны нулю. Поэтому, если действие силы прекращается именно в этом положении, груз будет оставаться неподвижным. Итак, время τ действия силы должно быть равно $\tau=nT$, где $n=1, 2, 3, \ldots$

Характерной ошибкой при решении этой задачи было неправильное понимание вопроса задачи. После прекращения действия силы груз будет оставаться неподвижным, если и скорость, и ускорение груза равны нулю. Это будет только в крайнем правом положении. (В крайнем левом положении скорость груза действительно равна нулю, но ускорение его отлично от нуля. В тот момент, когда силы уравновешены и ускорение груза равно нулю, отлична от нуля его скорость.)

2. Изменение показания динамометра связано с действием на гирю выталкивающей силы, которая равна весу воды в объеме погруженной части гири:

$$|\Delta\vec{F}|=\varrho gS\Delta h,$$

откуда

$$S=\frac{|\Delta\vec{F}|}{\varrho g\Delta h}\approx6{,}25\ \text{см}^2.$$

Эта простая задача оказалась с «подводным камнем», который подавляющее большинство абитуриентов не заметили и совершенно формально написали правильное решение. При устном обсуждении задачи многие не могли ответить на вопрос, почему они запи-

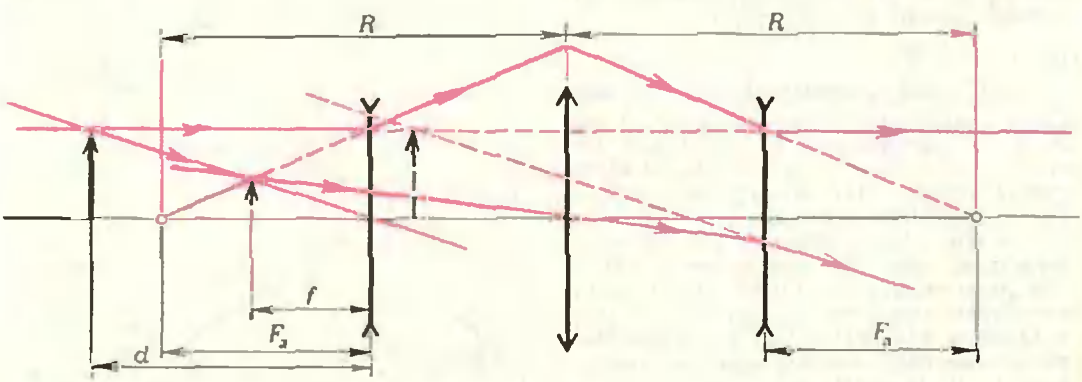


Рис. 14.

сали именно такое выражение для выталкивающей силы. Некоторые, например, утверждали, что в данном случае выталкивающая сила равна весу вытесненной воды и равна $\varrho gS\Delta h$. В этом утверждении содержится сразу две ошибки, которые исключают друг друга, и в результате получается формально правильный ответ. Первое ошибочное утверждение — в данном случае выталкивающая сила равна весу вытесненной воды, второе — объем вытесненной воды равен $S\Delta h$.

3. Частицы будут проходить через сетки (преодолевать задерживающую разность потенциалов U_0), если их энергия будет больше некоторой минимальной энергии E_{min}. При скорости $\vec{v}_0$, соответствующей E_{min} ($E_{min}=mv_0^2/2$), проекция скорости частицы на направление вдоль поля у поверхности второй сетки равна нулю; следовательно,

$$\frac{mv_0^2\cos^2\alpha}{2}=qU_0.$$

Проекция скорости на направление, перпендикулярное полю, равная $v_0\sin\alpha$, не изменяется. Согласно закону сохранения энергии,

$$E_{min}=qU_0+E_{min}\sin^2\alpha,$$

откуда

$$E_{min}=\frac{qU_0}{1-\sin^2\alpha}=4qU_0.$$

Таким образом, при энергиях $E>4qU_0$ частицы смогут проходить через сетки.

Большинство абитуриентов успешно справились с этой задачей. Некоторые допустили характерную ошибку: при записи закона сохранения полной энергии частицы не учитывали кинетическую энергию, связанную с проекцией скорости на направление, перпендикулярное линиям электрического поля, и получали, что результат не зависит от угла α. Тогда, пытаясь ввести угол α, они делали еще более грубую ошибку: умножали начальную энергию на $\cos\alpha$, то есть пытались «проектировать» энергию.

4. Данная оптическая система дает прямое изображение предмета в натуральную величину, если в первом случае центр кривизны зеркала совпадает с ближайшим к предмету фокусом линзы, а во втором случае центр кривизны зеркала находится в той же плоскости, что и первое изображение, создаваемое линзой. Ход лучей для первого случая показан на рисунке 14; для наглядности изображена эквивалентная схема: зеркало заменено собирающей линзой с тем же фокусным расстоянием, равным половине радиуса кривизны R зеркала. Из этого рисунка видно, что изображение предмета действительно прямое и натуральной величины. Если сдвинуть зеркало (или эквивалентную ему положительную линзу) вправо на расстояние $l=F_л-f$, то центр кривизны зеркала попадет в плоскость первого изображения, создаваемого линзой, и окончательное изображение опять будет прямым и в натуральную величину (сделайте самостоятельно соответствующий чертеж). Тогда по формуле линзы

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=-\frac{1}{F_л},\ \text{или}\ \frac{1}{d}-\frac{1}{F_л-l}=-\frac{1}{F_л},$$

откуда

$$d=\frac{F_л(F_л-l)}{l}=40\ \text{см}.$$

Заметим, что это типичная задача, требующая неформального подхода к ее решению. Прежде всего необходимо выяснить, при каких взаимных расположениях отрицательной линзы и вогнутого зеркала может получиться прямое изображение натуральной величины. Для данной системы это возможно только в двух, указанных выше, случаях. А, например, для системы положительная линза плюс вогнутое зеркало — четыре таких взаимных расположения (попробуйте их найти). Наиболее характерная ошибка при решении этой задачи связана с непониманием того, что формирование изображения в данной оптической системе происходит в три этапа: преломление лучей в линзе, отражение от зеркала и опять преломление в линзе. Последний этап многие не учитывали. Большинство абитуриентов пытались решить задачу формально — записать систему соответствующих уравнений и решить ее. Даже при условии, что система составлена правильно, для ее решения требовалось много времени. Лишь единицы сумели довести все математические выкладки до конца, остальные безнадежно запутались.

А. Болибрух,
В. Можаев

Рассказывает «Фотон»

С сентября 1980 года в Москве в Центральном лектории Всесоюзного общества «Знание» работает молодежный лекторий «Фотон». Он рассчитан на старшеклассников, увлекающихся физикой, и на его заседаниях, которые происходят ежемесячно, регулярно присутствует несколько сот московских школьников. Особенно многолюдным было заседание, проведенное в январе 1981 года. Доктор физико-математических наук М. Каганов и писатель-фантаст А. Стругацкий более трех часов вели разговор о том, как в современном мире взаимодействуют наука и фантастика. В феврале состоялась встреча с учеными Дубны, работающими в Объединенном институте ядерных исследований. Они рассказали о современных и будущих ускорителях заряженных частиц, о поисках кварков и новых трансурановых элементов. До этого в гостях у школьников побывали академики Е. Лифшиц, А. Мигдал и действительный член Академии педагогических наук В. Фабрикант. Они рассказывали о «черных дырах», нейтронных звездах и других интереснейших проблемах физики и астрофизики. В марте «Фотон» организует встречу с журналом «Природа», а в апреле — с учеными Академии наук СССР и московских вузов.

В. Л.

Заочная школа программирования

Урок 13: Приближенное решение уравнений с помощью ЭВМ

Из школьного курса математики вы знакомы с линейными и квадратными уравнениями, корни которых могут быть найдены по известным вам формулам. Существуют такие формулы и для решения уравнений третьей и четвертой степеней. А вот уравнение общего вида пятой и более высоких степеней неразрешимо в радикалах: решения таких уравнений (в общем случае) нельзя выразить через коэффициенты с помощью арифметических действий и извлечения корней*). Задача еще больше усложняется, если рассматривать неалгебраические уравнения**). В этом случае найти для корней явные выражения, за редким исключением, не удается. Но означает ли это, что такие уравнения нельзя решить? Обычно для нахождения корней уравнений, возникающих при решении большинства **прикладных** задач, и не нужна точная формула. Чаще всего для таких задач достаточно получить ответ с определенной степенью точности. Поэтому важно знать и уметь применять тот или иной способ вычисления корня уравнения с необходимой степенью точности. Известен целый ряд методов приближенного решения уравнений. Описанию некоторых из них и посвящен этот урок.

*) См., например, «Квант», 1976, № 5, с. 2.
**) Уравнение $F(X)=0$ называется *алгебраическим*, если $F(X)$ — многочлен.

Рассмотрим один из них на примере решения задачи 26 Олимпиады по программированию («Квант», 1980, № 3): пусть Ф1(М) — описанная на Рапире функция с одним параметром (М). Нужно найти и отпечатать все целые корни уравнения Ф1(М) = 0, лежащие на отрезке [0; 100].

Большинство ребят, принявших участие в Олимпиаде, хорошо справились с этой задачей. Действительно, алгоритм ее решения несложен. Сначала вычислим значение Ф1(М) при $M=0$. Если результат равен нулю, то число 0 — корень данного уравнения. Теперь найдем значение Ф1(М) при $M=1$ и опять сравним полученное значение с нулем. Последовательно вычисляя значения Ф1(М) при всех целых $M \in [0; 100]$, найдем те из них, при которых Ф1(М) = 0. Эти значения М и являются корнями уравнения Ф1(М) = = 0. Заметим, что в этом случае найдены точные значения корней.

Реализация этого алгоритма посильна любому школьнику, который умеет находить значения выражений и сравнивать их с нулем. Но сколько времени потребуется для решения уравнения этим способом «вручную»? А если левая часть уравнения достаточно сложна и отрезок, на котором нужно искать решения, велик? Здесь на помощь человеку приходит вычислительная техника. Проверьте, что по следующей программе будут отпечатаны все целые решения уравнения Ф1(М) = 0 из отрезка [0; 100], а их количество накапливается в счетчике корней СЧЕТКОР.

```
ПЕЧАТЬ ('РЕШЕНИЯ НА [0; 100]');
0—> M; 0—> СЧЕТКОР;
ПОКА M=<100::
   ЕСЛИ Ф1(M)=0 ТО
   ПЕЧАТЬ(M);
   СЧЕТКОР+1  —>  СЧЕТКОР
   ВСЕ;
   1+M —> M
ВСЕ;
ЕСЛИ СЧЕТКОР=0 ТО
ПЕЧАТЬ('КОРНЕЙ  НЕТ')  ВСЕ;
```

А если нужно организовать поиск требуемых решений на различных отрезках? В этом случае удобно описать процедуру с двумя параметрами НАЧ и КОН, которая организует поиск всех целых решений уравнений Ф1(М)=0 на отрезке [НАЧ; КОН].

```
ПРОЦ ПОИСК НАЧ КОН;
ПЕЧАТЬ ('РЕШЕНИЯ НА [',
НАЧ,';',КОН,']');
НАЧ—>М; 0—>СЧЕТКОР;
ПОКА М=<КОН::
   ЕСЛИ Ф1(М)=0 ТО ПЕЧАТЬ
   (М);
   СЧЕТКОР+1—>СЧЕТКОР ВСЕ;
   М+1—>М
ВСЕ;
ЕСЛИ СЧЕТКОР=0 ТО
ПЕЧАТЬ ('КОРНЕЙ НЕТ') ВСЕ;
КНЦ;
```

Задание 13.1. *Составить программу для поиска всех целых решений уравнения* X^3-10X^2-27X+ $+36=0$ *на отрезках* $[-10;\ 0]$, $[1;\ 100]$.

* Задание 13.2. *Составить программу, по которой будут найдены все пары целых чисел вида* (X; Y), *являющиеся решениями уравнения* $2Y-X^2=4$, *если* $X\in[-50;\ 25]$, $Y\in[100;\ 300]$.

Прежде, чем перейти к описанию других методов решения уравнений, сделаем несколько замечаний. Мы будем предполагать рассматриваемые функции непрерывными, то есть имеющими графики в виде линий без разрывов*). Кроме того, мы исключаем из рассмотрения случай, когда график функции касается оси OX с одной стороны (рис. 1). Тогда легко видеть **), что

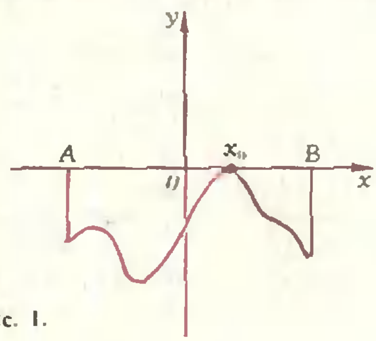


Рис. 1.

1°. Если уравнение F(X)=0 имеет на некотором интервале N различных корней, то график функции F пересекает ось OX на этом интервале тоже N раз (рис. 2,*а*).

2°. Если на концах отрезка [A; B] функция F принимает значения разных знаков, то уравнение F(X)=0 имеет на этом отрезке нечетное число корней (рис. 2,*а*), а если — одного знака, то — четное число корней (рис. 2,*б*,*в*). Заметим, что в последнем случае корней может не оказаться (0 — тоже четное число!).

Проверить, одинаковы или различны знаки у F(A) и F(B), можно простым способом: если произведение F(A) · F(B) отрицательно, то F(A) и F(B) имеют разные знаки, а если положительно — одинаковые.

Метод половинного деления

Будем искать корни уравнения F(X)=0 на отрезке [A; B] с точностью до 0,001. Будем считать, что C — *корень уравнения с точностью до* 0,001, если $|F(C)|<0{,}001$. (Заметим, что в Рапире есть стандартная функция ABS(X), которая вычисляет модуль выражения X.)

Разумеется, $|F(C)|<0{,}001$ не означает F(C)=0; поэтому «корень уравнения с точностью до 0,01»

*) Точное определение непрерывности, которое здесь не требуется, можно прочитать в пособии «Алгебра и начала анализа 9—10», п. 13.

**) Доказательство мы приводить не будем.

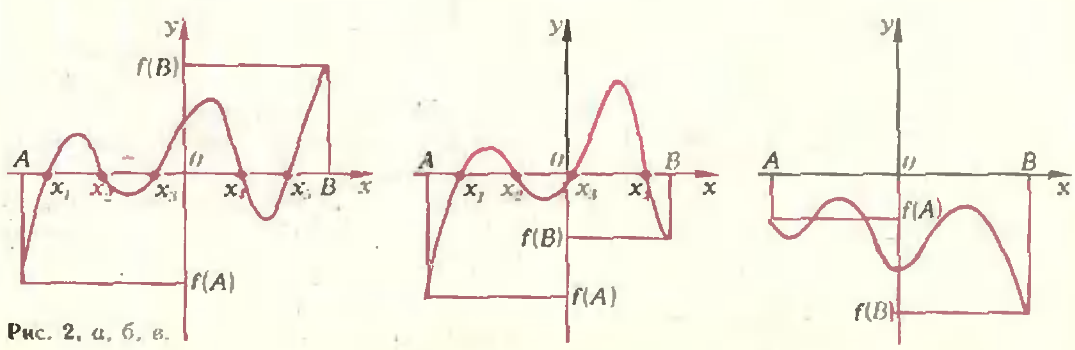


Рис. 2, *а*, *б*, *в*.

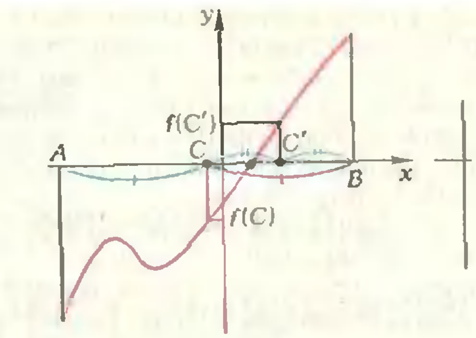
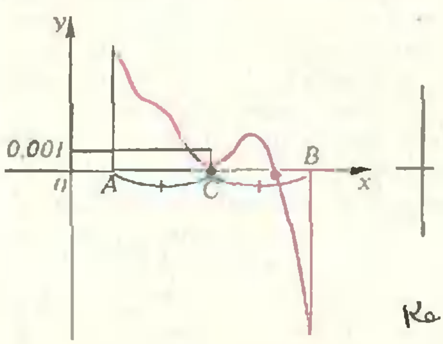


Рис. 3.

не обязательно является корнем.

Рассмотрим случай, когда на этом отрезке существует точно один корень данного уравнения (для того, чтобы выделить такой отрезок, существуют специальные методы; об одном из них рассказано ниже) и числа F(A) и F(B) имеют разные знаки. Предположим для определенности, что $F(A)<0$, $F(B)>0$ (рис. 3). Середина отрезка [A; B] имеет абсциссу $C=(A+B)/2$. Вычислим $|F(C)|$ и сравним его с 0,001. Если окажется, что $|F(C)|<0{,}001$, то C — искомое число. Если же $|F(C)|\geqslant 0{,}001$, поступим следующим образом: из отрезков [A; C], [C; B] выберем тот, на концах которого функция F принимает значения разных знаков; обозначим теперь его через [A; B]. Убедитесь, что нужный отрезок можно выбрать с помощью следующего предписания:
ЕСЛИ F(C)*F(B)<0 ТО C—>A ИНАЧЕ C—>B ВСЕ;
По построению, для нового отрезка [A; B] справедливы соотношения. $F(A)<0$, $F(B)>0$. Читатель уже, наверное, догадался, что нужно делать дальше. Опять рассмотрим середину отрезка [A; B], вычислим в ней значение функции F и сравним



Ко

Рис. 4.

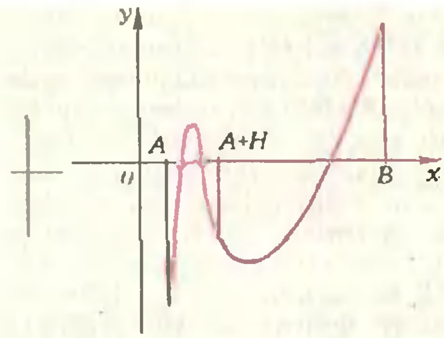


Рис. 5.

модуль этого значения с 0,001. Если новое значение C удовлетворяет условию $|F(C)|<0{,}001$, то это и есть искомое число. В противном случае — опять из двух отрезков [A; C] и [C; B] нужно выбрать тот, на концах которого функция F принимает значения разных знаков. Описанный процесс нужно продолжать до тех пор, пока искомое число не будет найдено.

Внимательный читатель наверное заметил, что данный метод не всегда дает нужный ответ: случай, когда получается «ненастоящий» корень уже на первом шагу показан на рисунке 4.

З а д а н и е 13.3. *Запрограммировать решение уравнения* $X^3+3X-1=0$ *на отрезке* [A; B] *с точностью* ЭПСИЛОН *методом половинного деления.*

Метод перебора с возвратом

Снова рассмотрим задачу поиска корня уравнения $F(X)=0$ с точностью до 0,001 на отрезке [A; B], но на этот раз не будем делать никаких предположений о наличии корней на отрезке.

Рассмотрим отрезок [A; A+H], где H — произвольное «малое» чис-

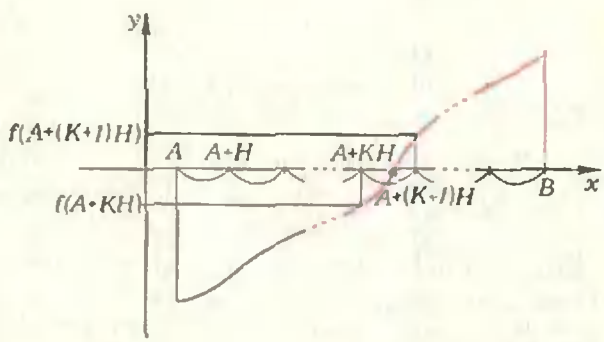


Рис. 6.

ло, называемое *шагом*. Если на концах этого отрезка функция F принимает значения одного знака, естественно ожидать, что уравнение $F(X)=0$ корней на нем не имеет, во всяком случае при малом H. Правда, это не всегда так (см. рис. 5), но подобные корни будут «пойманы» нашим методом позднее, при меньшем шаге H (конечно, если другой корень не будет найден раньше!).

Рассмотрим следующий отрезок длины H — отрезок $[A+H;\ A+2H]$ — и повторим все описанные рассуждения для него. Так будем поступать до тех пор, пока не найдем такой отрезок $[A+kH;\ A+(k+1)H]$, на концах которого функция F принимает значения разных знаков. Если такого отрезка на $[A;\ B]$ не окажется, мы уменьшим шаг H (скажем, в 10 раз) и начнем все сначала.

Пусть теперь $[A+kH;\ A+(k+1)H]$ — такой отрезок, на концах которого функция F принимает значения разных знаков. Значит, на этом отрезке есть, по крайней мере, один корень уравнения $F(X)=0$. Тогда в качестве приближенного значения корня можно попробовать взять любое число C из интервала $]A+kH;\ A+(k+1)H[$ (обычно берут либо один из концов интервала, либо его середину) (рис. 6).

Вычислим $F(C)$ и проверим неравенство $|F(C)|<0{,}001$. Если это неравенство истинно, то C — искомое число. Если же $|F(C)|\geqslant 0{,}001$, повторим для отрезка $[A+kH;\ A+(k+1)H]$ все рассуждения, проведенные для отрезка $[A;\ B]$. В качестве величины шага теперь выберем меньшее число, например поделим шаг H на 10.

Конечно, нужно указать условия, обеспечивающие остановку выполнения программы, которые необходимы, например, при отсутствии корней на данном интервале.

* Задание 13.4. *Запрограммировать решение уравнения* $F(X)=0$ *на отрезке* $[A;\ B]$ *с точностью* ЭПСИЛОН *методом перебора с возвратом.*

И. Юнерман

Рецензии, библиография

Ученый и революционер

У многих ученых была интересная судьба, но мало кто прожил такую захватывающую жизнь, полную приключений и превратностей, как Гаспар Монж.

Сын бедных родителей, благодаря своему таланту и трудолюбию ставший великим гражданином своей страны, академиком и министром, революционером, пославшим на смерть короля Людовика XVI, был не только математиком и механиком, химиком и металлургом, но и активным участником Великой французской буржуазной революции. Его жизнь драматична и противоречива. В последние годы жизни революционер, якобинец Монж — граф и личный друг Наполеона I.

О жизни и творчестве великого французского ученого, создателя начертательной геометрии Гаспара Монжа (1746—1818) популярно и увлекательно рассказывает В. П. Демьянов в своей книге «Геометрия и Марсельеза»*). Книга написана хорошим литературным языком, она очень познавательна, чувствуется, что автор хорошо знаком с излагаемым материалом и умеет его подать. На последнем конкурсе на лучшую научно-популярную книгу, который ежегодно проводит общество «Знание», книга В. П. Демьянова «Геометрия и Марсельеза» получила поощрительный диплом.

Книга читается с большим интересом, и автору можно сделать лишь единственный упрек. Жизнь Монжа он описал более ярко, чем его научную деятельность. А вклад Монжа в науку был огромен. Монж в науке был таким же революционером, как и в жизни.

В. Лишевский

*) Владимир Демьянов. «Геометрия и Марсельеза» (М., «Знание», 1979).

Книга о прошлом и будущем Вселенной

Строгая повторяемость небесных явлений и кажущаяся неизменность небесных объектов создавали иллюзию того, что окружающий нас мир стационарен, что Вселенная статична. «В продолжении всего прошедшего времени, согласно летописям, завещаемым потомкам от поколения к поколению, мы не находим следа изменений ни во всем удаленном небе в целом, ни в одной из подходящих частей неба», — писал великий Аристотель. Даже Эйнштейн — создатель самой поразительной и глубокой физической теории — вначале не поверил, что из уравнений его собственной теории следует нестационарность Вселенной. Но, оказывается, еще теория тяготения Ньютона предсказывала нестационарность мира...

В последние годы для интересующихся тайнами мироздания написан ряд книг. Среди них «Вселенная, жизнь, разум» И. С. Шкловского, «В глубины Вселенной» Ю. Н. Ефремова, «Извечные тайны неба» А. А. Гурштейна, «Астрофизика — школьникам» и «Физика Вселенной» Е. П. Левитана, «Эволюция Вселенной» И. Д. Новикова. Расскажем немного о последней книге, выпущенной в 1979 году издательством «Наука». Автор книги — известный советский астрофизик и космолог И. Д. Новиков — пришел в большую науку из астрономического кружка Московского планетария. Выпускник МГУ, он стал не только одним из авторов фундаментальных монографий «Релятивистская астрофизика», «Теория тяготения и эволюция звезд» и «Строение и эволюция Вселенной», но и талантливым пропагандистом достижений современной астрономической науки.

В космологии рассматриваются столь большие области пространства, что вещество Вселенной напоминает однородную и непрерывную среду, роль «атомов» в которой играют галактики или даже гигантские скопления галактик. Космологическая модель такой однородной и изотропной Вселенной была построена в 1922—1924 годах замечательным советским ученым А. А. Фридманом, который, основываясь на теории Эйнштейна, показал необходимость глобальной эволюции Вселенной. Вскоре астрономические наблюдения подтвердили, что галактики разбегаются, а вся охваченная наблюдениями часть Вселенной (Метагалактика) расширяется.

Можно сказать, что в XX веке Вселенная предстала перед нами в новом виде. Человек ощутил себя жителем расширяющейся Метагалактики, осознал грандиозность нового видения мира. Из вечной и неизменной Вселенная как бы превратилась в свою противоположность. По выражению английского астрофизика Джеймса Джинса, нам открылась «великолепная, ошеломляющая и страшная Вселенная»... Идея развития, идея эволюции навсегда вошла в астрономическую картину мира. Глобально эволюционирующую Вселенную дополнили впечатляющие локальные катастрофы, которые сопровождают взрывы сверхновых звезд, феноменальные процессы в пульсарах, квазарах, ядрах активных галактик и пока еще гипотетических черных и белых дырах разного масштаба.

В книге об эволюции Вселенной все это, конечно, нашло определенное отражение. Автор не обошел вниманием и такие вопросы, как: почему расширяется Вселенная, что придало скорость галактикам и многие-многие другие.

Заметим, что в книге сравнительно мало формул, причем большинство из них выводится самым элементарным образом. Так, буквально «на пальцах» показывается, что сферическая оболочка не создает во внутренней полости никакого гравитационного поля; доказывается, что любые две галактики в однородной Вселенной испытывают относительное отрицательное ускорение (а значит — мир галактик нестационарен); вычисляется время, протекшее с начала расширения нашей Вселенной; определяется критическое значение средней плотности вещества (при меньшей плотности Вселенная должна неограниченно расширяться, а при большей — расширение когда-нибудь должно смениться сжатием); выводится формула, связывающая величину радиуса кривизны пространства Вселенной с величиной критической плотности; дается подкрепляемое необходимыми формулами описание «сценария», по которому шло расширение Метагалактики в первые мгновения после начала расширения (!), через три минуты (!), через миллион лет (!); делаются количественные оценки гравитационной неустойчивости, возникающей в процессе расширения неоднородного вещества.

Если все сказанное побудит вас отыскать и прочитать книгу И. Д. Новикова (которая, как нам кажется, очень скоро станет библиографической редкостью), цель написания этой статьи будет достигнута.

Е. Левитан

О приеме на биологическое отделение ВЗМШ

Хорошее знание математики и физики нужно в наше время не только специалистам в этих областях или инженерам, нужно оно и биологам. При Всесоюзной заочной математической школе уже шесть лет работает биологическое отделение. Ребятам, которые учатся на нем, приходится размышлять не только над чисто биологическими вопросами. Приведем одно из заданий биологического отделения, которое требует умения подойти к биологической проблеме с точки зрения физики и использовать при этом количественные соображения.

1. Абсолютная сила мышц муравья и человека примерно одинакова: 8—10 кг в расчете на 1 см^2 поперечного сечения мышц. Как объяснить, что муравей может переносить предметы, превосходящие вес его тела в десятки раз?

2. У птиц и млекопитающих частота сокращений сердца, как правило, тем выше, чем меньше животное. Как можно объяснить такую закономерность?

3. Придумайте способ измерения частоты, с которой машет крыльями комар.

4. Известно, что распространение возбуждения в нервных волокнах осуществляется при помощи электрического тока. В каком волокне — толстом или тонком — выше скорость распространения возбуждения и почему?

На биологическое отделение ВЗМШ принимаются школьники, оканчивающие восьмой класс. Школьникам высылаются вопросы по разным разделам биологии и пособия по отдельным трудным вопросам. Ответы школьников проверяют студенты биологического факультета МГУ. В школу принимаются как отдельные ученики, так и школьные кружки, работающие под руководством учителя. Для поступления в школу надо успешно выполнить конкурсное задание. Вместе с конкурсной работой надо прислать сведения о себе: фамилия, имя и отчество; школа и класс; место работы и должность родителей; полный почтовый адрес. Надеемся, что восьмиклассники, которые будут выполнять конкурсную работу, сделают это к концу весенних каникул: крайний срок присылки работы — 5 апреля. О результатах конкурса будет сообщено осенью. Конкурсные работы не рецензируются. Школьники Москвы и Ленинграда на биологическое отделение ВЗМШ не принимаются.

Хотя вступительная конкурсная работа составлена для ребят, интересующихся биологией, ответы на ее вопросы требуют учета ряда физических соображений (вопросы 1, 2 и 4) и некоторых математических рассуждений (вопрос 5).

Вопросы конкурсного задания

1. Известно, что у некоторых животных (зайцы, китообразные) очень жирное молоко, а у других (обезьяны, волки) — нет. Предложите объяснение этого факта и на основе вашего объяснения попробуйте предсказать, у каких еще конкретных животных должно быть жирное, а у каких — нежирное молоко.

2. В связи с переходом к наземному образу жизни у растений развился целый ряд структур: корни, проводящая система, специальные покровные ткани и т. д. Как вы полагаете — какие структуры и приспособления должны были появиться первыми, чтобы обеспечить выход растений на сушу? Ответ необходимо обосновать.

3. Некоторые животные, например хамелеон или осьминог, могут менять свой цвет в соответствии с изменением цвета окружающего фона. Представьте себе, что вы — ученый, которому поручено изучить физиологические основы такой реакции животного. Какие конкретные вопросы вы перед собой поставите? Какие эксперименты вы станете проводить, чтобы ответить на эти вопросы? Как вы истолкуете тот или иной результат этих экспериментов?

4. Расположите следующих животных в порядке снижения их кровяного давления: собака, жираф, курица, лягушка. Ответ обязательно поясните.

5. Для учета численности животных часто применяют следующий метод: некоторое число животных вылавливают, метят и выпускают на волю. Затем производят повторный отлов. Для оценки численности существенно отношение числа меченых животных в повторном отлове к общему числу пойманных во второй раз животных. а) Напишите формулу, по которой определяют численность, и объясните, как вы рассуждали при ее выводе. б) Укажите, какие причины могут приводить к ошибкам при использовании этого метода. Для каждой из причин постарайтесь указать, приведет ли она к завышению или к занижению оценки численности.

Наш адрес: 113149, Москва, ГСП, Нахимовский проспект 4, ВЗМШ «Биология».

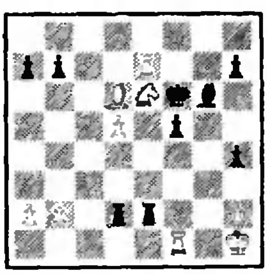
Биологическая комиссия ВЗМШ

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

Ласкер побеждает Стейница

В предыдущем номере мы рассказали о трех первых матчах на первенство мира. Теперь пойдем дальше...

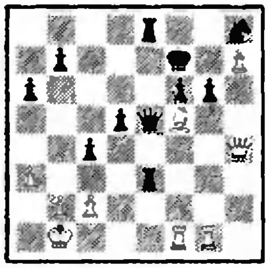
Второй матч В. Стейница с великим русским шахматистом М. Чигориным (1892 г.) проходил значительно напряженнее первого. Игра шла до десяти побед. После 23 партий Стейниц был впереди на очко, однако, если бы Чигорин выиграл очередную партию, счет побед становился 9:9 и по условиям матча игра продолжалась бы еще до трех побед. В этой партии произошел трагический случай, равного которому история борьбы за шахматную корону не знает.



Чигорин — Стейниц

У белых лишняя фигура, и после 32.Л:b7 они легко выигрывали (предлагаем вам убедиться в этом самостоятельно). Но последовало совершенно невероятное **32.Сb4??**, и после ответного **32...Л:h2+** матч тут же закончился (33.Kpg1 Лdg2×).

Эммануил Ласкер, основатель психологического подхода к шахматной борьбе, был на 32 года моложе своего великого предшественника, и эта разница в возрасте являлась слишком большой форой в их сражении.

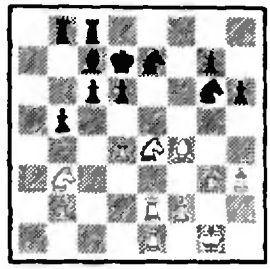


Ласкер — Стейниц

Это положение из седьмой партии матча 1894 года. Черные уже по дебюту получили огромный перевес, и, несмотря на отчаянные попытки противника запутать игру, ситуация не изменилась. Надвигая сейчас пешки ферзевого фланга (35.Фh6 не опасно из-за 35...Лg3), Стейниц мог взять верх и повести в счете. Однако его нервы не выдержали, следующим ходом он допустил решающую ошибку и вскоре сдал партию — первую в серии из пяти поражений.

34... gf? 35.Фh5+ Kpe7 36.Лg8 Kpd6 37.Л:f5 Фe6 38.Л:e8 Ф:e8 39.Л:f6+ Kpc5 40.Фh6 Лe7 41.Фh2 Фd7 (41...Фd8 42.Фf2+ и 43.Лf8) **42.Фg1+ d4 43.Фg5+ Фd5 44.Лf5 Ф:f5 45.Ф:f5+ Kpd6 46.Фf6+. Черные сдались.**

Проиграв матч, Стейниц провозгласил троекратное «ура» в честь второго чемпиона мира, но спустя два года вызвал Ласкера на матч-реванш. За всю последующую историю не было больше случая, чтобы в борьбу за мировую шахматную корону вступил 60-летний шахматист. Стейниц потерпел сокрушительное поражение. Любопытно, что этот матч проходил в Москве, а следующее состязание такого высокого ранга состоялось в нашей столице спустя более полувека. Во второй партии матча Ласкер провел знаменитую матовую комбинацию.



Ласкер — Стейниц

31.h4 h5 (взятие слона на f4 приводило к быстрому мату после Kf6+) **32.Cg5 Cd8 33.g4! hg 34.h5 Kf8 35.Kec5+! dc 36.K:c5+ Kpd6** (в случае 36...Kpc7 достаточно для победы 37.C:e7 C:e7 38.Л:e7+ Kpb6 39.Л:g7, но теперь следует форсированный мат) **37.Cf4+ Kpd5 38.Лe5+ Kpc4** (38...Kpd6 39.Лf5×; 38...Kp:d4 39.Лle4×) **39.Лe1× Kp:d4** (39...Kpb4 40.Cd2+) **40.Kb3+ Kpd3 41.Лe3×.** Заключительная матовая конструкция весьма эффектна.

Убедив шахматный мир в том, что он покорил его не случайно, Ласкер несколько снизил свою шахматную активность, сосредоточив основные усилия на математике и философии. Только через десять лет он сыграл новый матч за мировое первенство. Преимущество Ласкера над Маршаллом было бесспорным. Вот окончание третьей партии матча.

Маршалл — Ласкер

37...Kf3! 38.gf Ф:h3+ 39.Kpg1 Фg3+ 40.Kph1 Лf4 41.Фd8+ (правильно было 41.Фh5 Лh4+ 42.Ф:h4) **41...Kph7 42.Лf1?** (последняя ошибка, шансы на ничью сохраняло 42.Лc2 Лh4+ 43.Ф:h4 Ф:h4+ 44.Kpg2) **42...Лf5! Белые сдались** (мат неизбежен: 43.Фe8 Фh4+ 44.Kpg2 Лg5×).

Закон сохранения энергии для тепловых процессов

1. $A = p_0 V \Delta T / T \approx 3{,}4$ Дж.
2. $Q = C_V \Delta T + R\Delta T/2 = 3R\Delta T \approx 25$ Дж.
3. $n = -1/2$.
4. На участке *1—2* температура газа возрастала, при этом газ получал тепло. На участке *2—3* температура газа не менялась, но тепло он получал. На участке *3—4* температура уменьшалась, при этом газ отдавал тепло. На участке *4—1* температура не менялась, но газ отдавал тепло.
5. $A = \frac{m}{\mu}\,\frac{R\alpha}{2}(V_2^2 - V_1^2)$; газ поглощает тепло.

Пригодны ли счеты?

1. Счеты будут иметь вид, показанный на рисунке 1. Наибольшее число, которое можно отложить на «испорченных» счетах,— это $7531_{и} = 383_{10}$.
2. $3121_{и} = 3 \cdot 48 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 2 + 1 = 157_{10}$;

$$1401_{и} = 1 \cdot 48 + 4 \cdot 8 + 0 \cdot 2 + 1 = 81_{10};$$
$$230_{и} = 2 \cdot 8 + 3 \cdot 2 + 0 = 22_{10}.$$

3. Число 37_{10} представим в виде суммы

$$37_{10} = 4 \cdot 8 + 2 \cdot 2 + 1 = 421_{и}.$$

Аналогично:

$$59_{10} = 1 \cdot 48 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 2 + 1 = 1111_{и};$$
$$101_{10} = 2 \cdot 48 + 0 \cdot 8 + 2 \cdot 2 + 1 = 2021_{и};$$
$$269_{10} = 5 \cdot 48 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 2 + 1 = 5321_{и}.$$

4. $411_{и}$; $7010_{и}$; $5210_{и}$; $131_{и}$; $310_{и}$; $3310_{и}$.
5. $21_{и} \times 3_{10} = 131_{и}$.
6. $7431_{и}$.

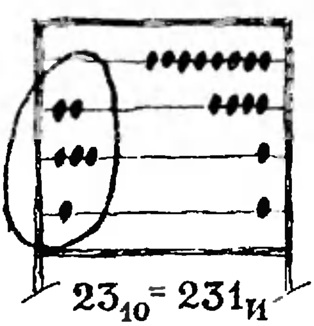


Рис. 1.

Московский физико-технический институт

Математика

Вариант 2

1. $\left]-\frac{4}{3};\ 2\right[$.
2. $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n\ (n \in \mathbf{Z})$.
3. Площадь квадрата больше.
4. а) $\left]-\infty;\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup [-1; 0[\cup \left]0;\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup [1;\ +\infty[$;

б) $\left]\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\ -1\right[\cup \left]\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\ 1\right[$.

$$\left\{\log_2\left(\frac{|a| - \sqrt{a-a^3}}{\sqrt{a-a^3}}\right);\ \frac{\sqrt{a-a^3} + |a|^3 - |a|}{|a| - \sqrt{a-a^3}}\right\};$$

в) $a = 0$, $\{(\alpha;\ 2^{-\alpha})\}(\alpha \in \mathbf{R})$.

5. Пусть SAD — грань, перпендикулярная плоскости проекций, MN — перпендикуляр на эту грань из середины M противоположного ребра, φ — угол между (AD) и плоскостью проекций, тогда $|MN| = \frac{2\sqrt{2}}{3}a$, $|SN| = \frac{7}{6}a$, длина высоты трапеции равна $|MN|$, длина меньшего основания — $a\cos\varphi$, а большего — $\frac{a}{2}(3\sin\varphi + \cos\varphi)$. Из равнобедренности трапеции следует, что $\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{5}$, поскольку проекция точки N — середина большего основания.

Ответ. $\frac{4}{\sqrt{17}}a^2$.

Вариант 3

1. $\{0, 3\}$.
2. $\left]-\infty;\ \frac{\sqrt{6}-1}{2}\right[\cup \left]\frac{6}{5};\ \frac{\sqrt{6}}{2}\right[$.
3. $\frac{5}{\pi}$.
4. а) да; б) $\frac{81}{5}$.
5. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Указание. $\left|\frac{AP}{PQ}\right| < \left|\frac{AP}{PQ_0}\right|$, где Q_0 — основание перпендикуляра из точки A на $[A_1F]$.

Физика

Вариант 2

1. Пороговая энергия $E_п$ — это минимальная энергия налетающей частицы, при которой происходит ядерная реакция. Она включает в себя энергию E, поглощаемую при реакции, и минимальную кинетическую энергию $E_к$ продуктов реакции ($E_к$ не может быть равной нулю, исходя из закона сохранения импульса). Эта кинетическая энергия минимальна, если ядро кислорода и протон движутся как единое целое, то есть с одинаковыми скоростями. Согласно закону сохранения энергии, в первом случае

$$E_п = E + \frac{m_\alpha E_п}{m_0 + m_p},$$

где m_α, m_0 и m_p — массы α-частицы, ядра кислорода и протона соответственно. Во вто-

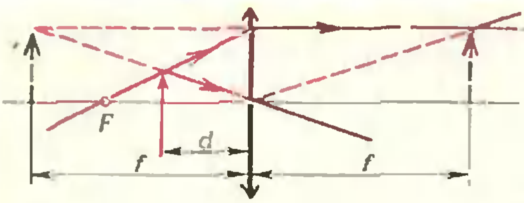


Рис. 2.

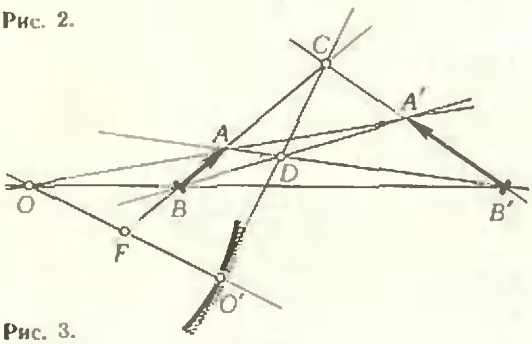


Рис. 3.

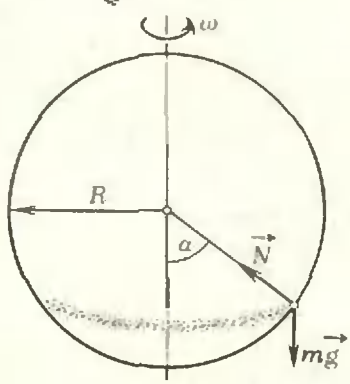


Рис. 4.

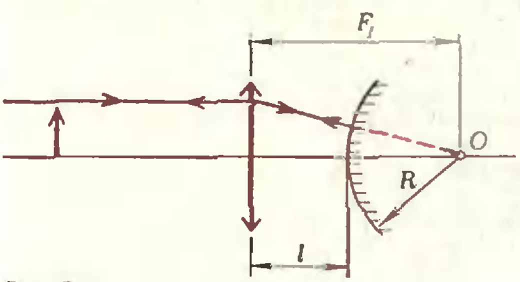


Рис. 5.

ром случае энергия $E_н$ α-частицы будет равна

$$E_н = E + \frac{m_н E_α}{m_0 + m_p}.$$

Тогда увеличение энергии α-частицы

$\Delta E_α = E_α - E_п =$

$$= E_н \frac{m_н m_p}{(m_0 + m_p)(m_0 - m_н)} \approx 25 \text{ кэВ}.$$

2. $l = l_0 \dfrac{p_0 + |\vec{F}|/S}{p_0}$. Указание. Скорость поршня будет максимальной в тот момент, когда давление воздуха в цилиндре станет равным атмосферному давлению.

3. $L = \dfrac{Trn}{2\pi}$; $C = \dfrac{T}{2\pi rn}$.

4. $F_л = 3$ см. Указание. Ход лучей для линзы показан на рисунке 2. При замене линзы сферическим зеркалом изображение в зеркале (мнимое, прямое и того же размера) будет расположено симметрично изображению в линзе.

Вариант 3

1. $|\vec{F}_{\min}| = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \mu}{1 + \mu \operatorname{tg}\alpha} mg \approx 3{,}3$ Н.

2. $T_2 = \dfrac{p_2 V_1}{\left(\dfrac{p_1 V_1}{RT_1} - \dfrac{V_2}{V_0}\right) R} \approx 254{,}8$ К (здесь $V_0 = 22{,}4$ л — объем, занимаемый одним молем любого газа при нормальных условиях).

3. Сила тока в цепи будет максимальной в те моменты, когда напряжение на катушке индуктивности, а значит, и суммарное напряжение на обоих конденсаторах будут равны нулю. Следовательно, в эти моменты напряжения на конденсаторах одинаковы по модулю и противоположны по знаку. Обозначим модуль этого напряжения через U'. Запишем законы сохранения заряда и энергии:

$$C_1 U' + C_2 U' = C_1 U,$$

$$\frac{C_1 U'^2}{2} + \frac{C_2 U'^2}{2} + \frac{L I_{\max}^2}{2} = \frac{C_1 U^2}{2}.$$

Отсюда

$$I_{\max} = U \sqrt{\frac{C_1 C_2}{L(C_1 + C_2)}}.$$

4. См. рис. 3 (прямая OO' перпендикулярна прямой CO'; O — оптический центр зеркала; O' — его полюс; F — фокус зеркала, причем $|OF| = |FO'|$).

Вариант 4

1. В силу симметрии при вращении сферы песчинки расположатся на ее внутренней поверхности вдоль тонкого кольца (рис. 4). На каждую песчинку действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила нормальной реакции $\vec{N}$. Спроектируем силы на горизонтальную и вертикальную оси координат и запишем соответствующие уравнения второго закона Ньютона:

$$|\vec{N}| \sin\alpha = m\omega^2 R \sin\alpha,$$

$$|\vec{N}| \cos\alpha - mg = 0.$$

Решая совместно эти уравнения, получим

$$\left(m\omega^2 R - \frac{mg}{\cos\alpha}\right) \sin\alpha = 0,$$

откуда возможны два решения: 1) $\sin\alpha = 0$; 2) $\cos\alpha = \dfrac{g}{\omega^2 R}$. Если $\omega^2 R < g$, реализуется только первое решение, то есть песчинки так и остаются на дне сферы. Если же $\omega^2 R > g$, реализуются оба решения, причем первое соответствует неустойчивому равновесию, а второе — устойчивому положению равновесия.

2. $h_1 = \dfrac{m_1 + m_2}{2AV} - \dfrac{p_0}{A} - \dfrac{l}{2} \approx 27{,}5$ см;

$h_2 = h_1 + l \approx 32{,}5$ см.

3. $\lambda_0 = \dfrac{2\pi\hbar c}{(A + eU_3)} \approx 2{,}25 \cdot 10^{-7}$ м.

4. $l = F_1 - 2F_2 = 5$ см. Указание. Фокус линзы совпадает с оптическим центром зеркала (см. рис. 5).

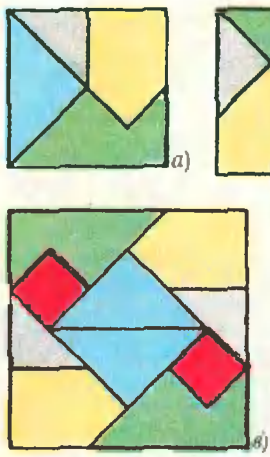


Рис. 6.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 1)

1. См. рис. 6*а*—*в*.
2. МИНУС = 14286.

Решение. Только цифра 6 вместо буквы С обладает тем свойством, что при умножении на нее трех других цифр (8, 4, 2) в произведениях на месте единиц получаются, соответственно, эти же цифры. Итак, С = 6, У = 8, поскольку второе произведение наибольшее. М = 1 (см. пятое произведение). Если И = 2, Н = 4, то второе произведение будет пятизначным. Поэтому Н = 2, И = 4.

3. Из вершины A к стороне BC путь проходит по цифрам

1—3—9—6—5—4—2—7—8;

из вершины B к стороне AC — по цифрам

7—1—5—3—2—4—6—8—9;

из вершины C к стороне AB — по цифрам

2—7—8—9—4—6—5—1—3.

4. Обозначим искомое число через $A = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$. Его цифры a_i, как легко видеть, убывают слева направо.

Пятая цифра не может быть равна 1 или превосходить 1, так как тогда четвертая цифра $a_4 > 2$, третья $a_3 > 4$, вторая $a_2 > 8$ и первая $a_1 > (8+4+2+1)+1 > 9$ — противоречие.

Поэтому пятая цифра равна 0. Отсюда цифра $a_4 > 1$ и не может быть $a_4 > 2$, так как, рассуждая аналогично, получаем, что первая цифра $a_1 > 6+3+2 > 9$.

Итак, четвертая цифра $a_4 = 1$, третья $a_3 > 2$ и не может быть $a_3 > 3$ (тогда первая цифра $a_1 = (5+3+1)+1 = 10 > 9$), то есть третья цифра $a_3 = 2$. Следовательно, $a_2 > 4$ и $a_1 > 8$ и искомые числа таковы:

$A_1 = 84210$, $A_2 = 94210$, $A_3 = 95210$.

5. Масштаб 1:1 000 000 означает, что все линейные размеры на карте уменьшены в 10^6 раз. Поэтому площадь карты, пропорциональная, как известно, квадрату линейных размеров, меньше площади всей территории СССР в $(10^6)^2 = 10^{12}$ раз. Число же людей, которые могут поместиться на определенной территории, пропорционально не ее линейным размерам, а ее площади. Именно поэтому на карте СССР может поместиться малое число людей.

Как получают сильные постоянные магнитные поля

(см. «Квант» № 1)

1. Так как $P \sim I^2 \sim B^2$, мощность, которую придется отводить при $B_2 = 25$ Тл, равна

$P_2 = \frac{B_2^2}{B_1^2} P_1 = 6{,}25$ МВт. Мощность же, отводимая водой, равна $P' = c\varrho \frac{V}{3600} \Delta t$ (Вт), где $c = 4 \cdot 10^3$ Дж/(кг · град), $\varrho = 10^3$ кг/м³, $V = 50$ м³/ч, $\Delta t = 80$ град. Подставив числа, найдем $P' \approx 4{,}4$ МВт $< P_2$ — система охлаждения «не справится», получить поле B_2 не удастся.

2. Производительность водопроводной магистрали — 56 м³/ч; расход жидкого азота — 32 м³/ч; расход жидкого водорода на алюминиевом соленоиде — 11 м³/ч.

Задачи о спутниках

(см. «Квант» № 1)

1. $t = \frac{2\pi}{\sqrt{g/(\alpha^3 r_3)} - 2\pi/T_3} = 10{,}5$ ч.

2. $v = \frac{2\pi}{T} r \sqrt{\frac{r}{r_{ю}}} = 39$ км/с.

3. $\beta = \frac{3}{2} \frac{|\vec{v}|\,\omega}{R} = 1{,}05 \cdot 10^{-23}$ рад/с².

Показательные уравнения

(см. «Квант» № 1)

1. $\left\{1, \frac{1}{2}\right\}$. 2. $\left\{\log_2 \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right\}$.

3. $\left\{\frac{1}{2} \log_2 6, \log_6 5\right\}$. 4. $\{3, 2+\log_5 2\}$.

5. $\left\{\frac{3}{2}\right\}$. 6. $\{0, 1, 7\}$. 7. $\{-1, 2/3\}$.

8. Указание. Прологарифмируйте левую и правую части по основанию 2, после чего сделайте замену $y = \log_2 x$. Решив квадратное уравнение, получим $y_1 = c+2$, $y_2 = c-1$, где $c = \log_2 3$. Ответ. $\left\{\frac{3}{2}, 12\right\}$. 9. $\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

10. $\{1\}$. 11. $\{1\}$. 12. $\{2\}$.

Шахматный конкурс

(см. «Квант», 1980, № 10).

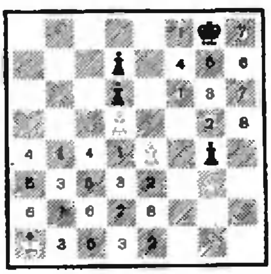
1. 1. **Kpg3! Kpe4 2. Kpg2!** (2. Kpf2 Kpf4 и Kpg4) **2...Kpe3 3. Kpf1 Kpe4 4. Kpe1 Kpe3 5. Kpd1 Kpf4 6. Kpd2 Kpe4 7. e3 Kpf3 8. Kpd3 Kpg3 9. Kpe4! Kpg4 10. Kpe5 Kp:h4 11. Kpf4 Kph3 12. e4 Kpg2 13. e5 h4 14. e6 h3 15. e7 h2 16. e8Ф h1Ф 17. Фe2+** и белые дают мат в 4 хода. Мы привели лишь основной вариант решения; при подведении итогов конкурса будет учитываться, насколько подробно указано решение (это касается и других заданий конкурса).

2. Указываем центральный вариант этого весьма тонкого этюда: **1. g4! Kpa3! 2. Kpa5! Kpb2 3. Kpb6! Kpb3 4. Kpb5! Kpc2 5. Kpc6 Kpc3! 6. Kpc5! Kpd2! 7. Kpd6! Kpd3! 8. Kpd5! Kpe2! 9. Kpe6! Kpe3! 10. Kpe5! Kpf2 11. Kpf6! Kpf3 12. Kpf5!** (наконец, черные в цугцванге) **12...Kpg2 13. Kpg6 Kph3! 14. Kph5! Kp:h2 15. Kp:h6**, 16. Kp:g5 и т. д. Вся игра построена на том, что черному королю недоступно поле g3. Восклицательных знаков довольно много, но все они уместны — для белых это единственные ходы, достигающие цели, а для черных — ходы, создающие белым максимальные трудности. (В этюде имеется ряд ложных следов, которые мы опускаем.)

3. **1. Kpf5!** (1. Kpf6? ведет к ничьей) **1...Kpb6** (1...Kpc6 2. Kpe6! 1...Kpc7 2. Kpe5!) **2. Kpf6!** (2. Kpe6? Kpc6!, 2. Kpe5? Kpc7!) **2...Kpb7 3. Kpf7! Kpb8 4. Kpe6 Kpc7** (4...Kpc8 5. Kpd6!) **5. Kpe7! Kpc6 6. Kpd8 Kpd6 7. Kpc8 Kpc6 8. Kpb8 Kpb6 9. Kpa8** и белые выигрывают.

(см. «Квант», 1980, № 11)

1. Белые выигрывают, если при короле на d4 могут сыграть e4—e5 без шаха или вторгнуться на поле f4. Таблица соответственных полей нанесена прямо на диаграмму.



Подробное описание ее построения мы здесь опускаем. Если ход черных, то они играют **1...Kpg7!** и добиваются ничьей, занимая соответственные поля при любых маневрах белого короля. Если же ход белых, то **1.Kpb1** лишает черных возможности держать оппозицию. Вот примерный вариант: 1.Kpb1! Kpg7 2.Kpc1 Kpg6 3. Kpd1 Kpg5 4.Kpc2! Kph6 5.Kpd2! Kph5 6.Kpc3! Kpg5 7.Kpc4! Kpg6 8.Kpd3 и далее Kpd3 — d4 или Kpd3 — e3 — f4 с выигрышем.

2. Авторское решение таково: **1.Лf8! Cc6 2.Лe8 Cd5 3.Лd8 Ce4 4.Лc8 Cd5 5.Cf3 Cc6 6.Ce4 Cb7 7.Cd5 Cc6 8.Лh8 Cb7 9.Cc6 C:c6**×! Многие читатели нашли решение, состоящее всего из трех ходов: **1.Cd5! Cc6 2.Лh8! Cb7 3.Cc6 C:c6**×.

(см. «Квант», 1980, № 12)

1. (К.Фабель, 1949 г.). Последним ходом белых была короткая рокировка! Самое удивительное, что в ней участвовал один король, переместившийся с e1 на g1. Дело в том, что белые играли партию с форой в две ладьи, а ладья на h3 — превращенная! Вместо короткой рокировки белые теперь делают длинную, в результате чего их король попадает с e1 не на g1, а на c1 (ладья a1, как и h1, участвует в рокировке лишь символически). После **1.0 — 0 — 0** черный король вынужден отступить в угол **1...Kpa1**, где и получает мат — **2.Лa3**×.

2. (Ф.Вайрд, 1910 г.). Последним ходом белый король взял черную ладью Kpg4:Лf5, которая перед этим побила белого ферзя — Лf1:Фf5. Вместо этого черные играют **1...Лh1** и получают мат — **2.Фf2**×.

В условии, конечно, опечатка (на доске стоит не конь, а король), но многие читатели «решили» и задачу с конем (что им зачтется при подведении итогов).

3. (Э.Погосянц, 1963 г.). Превращение пешки в ферзя можно разбить на две части: 1) с доски снимается собственная пешка; 2) на доску ставится превращенный ферзь. Белые уже успели сделать полхода — сняли с доски свою пешку h7. Теперь они заканчивают ход, водружая на h8 ферзя! Итак, полный ход белых — **1.h7 — h8Ф**×!

4. (Э.Погосянц, 1980 г.). Ход, который заключается в превращении пешки со взятием, можно разбить на три части: 1) снятие с доски собственной пешки; 2) снятие с доски неприятельской фигуры; 3) на место взятой фигуры ставится превращенная. В данной позиции треть хода уже сделана — белые сняли с доски свою пешку g7. Осталось снять черного ферзя («треть» хода), и на его место поставить белую ладью или ферзя (еще «треть» хода). Полный ход **1.g7:h8Л**×!

Номер подготовили:
А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
Л. Денисенко, М. Дубах, Г. Красиков, С. Лухин, Э. Назаров, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор М. Медведская

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, «Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 22.12.80
Подписано в печать 4.2.81
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 6,89 Т-02976
Цена 30 коп. Заказ 3123 Тираж 235 652 экз.

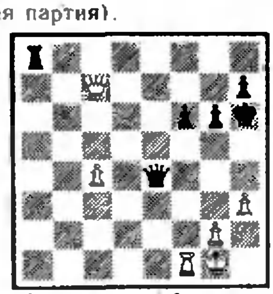
Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

ШАХМАТНЫЙ ◆ КОНКУРС ◆ «КВАНТА»

Комбинации Чигорина

На шахматной страничке этого номера вы познакомились с драматическим концом второго матча на первенство мира между В. Стейницем и основоположником отечественной шахматной школы М. Чигориным. И хотя Чигорин был ярче Стейница, превосходил его в понимании шахматного искусства, но когда дело касалось спортивной устойчивости и хладнокровия, в критические моменты борьбы Чигорин заметно уступал первому шахматному королю. Только недостатками характера можно объяснить тот факт, что Чигорин не стал чемпионом мира.

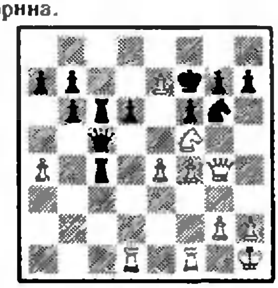
Прежде чем предложить вам несколько комбинаций Чигорина, приведем еще один редчайший пример «шахматной слепоты», взятый ни больше ни меньше, как из матча претендентов 1971 года (пятая партия).



Тайманов — Фишер

При анализе отложенной партии эта позиция стояла на доске у советской «бригады» в составе М. Тайманова и трех его тренеров В. Балашова, Е. Васюкова и А. Котова. Все четверо гроссмейстеров сочли единодушно, что Фишер не может идти на нее, так как теряет пешку после Л:f6. Когда американский гроссмейстер все же избрал этот вариант, удивленный Тайманов после некоторого размышления взял пешку — **1.Л:f6.** Шах ферзем **1...Фd4+** был для него как гром среди ясного неба. Оказалось, что четыре гроссмейстера просто-напросто зевнули ладью. После **2.Лf2 Лa1+** белые сдались. Подобные курьезы показывают, что не надо терять чувства юмора, когда вы зеваете мат или ладью — в этом отношении вы не отличаетесь от гроссмейстеров...

Рассмотрим теперь четыре известные комбинации Чигорина.

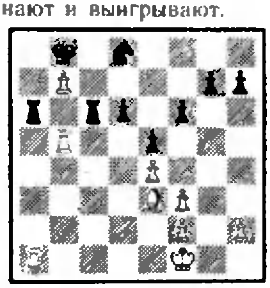


Чигорин — Поллок

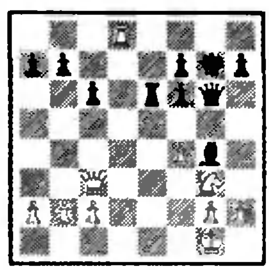
У черных лишняя пешка, кроме того под боем пешки a4 и e4. Кажется, что положение черных не внушает опасений, однако Чигорин находит великолепный решающий прорыв.

1.e5!! Этот удар производит сильное впечатление, ведь поле e5 защищено четыре раза! **1...fe** (остальные взятия не лучше — 1...de 2. Лd8 Лe6 3. Лf8+!; 1...К:e5 2. Ф:g7+; 1...Ф:e5 2. К:d6+! Л:d6 3. fe Л:g4 4. ed) 2. **К:d6+! Л:d6** 3. **fe+ Лf6** 4. **e8Ф+! Кр:e8** 5. **Фd7+ Крf8** 6. **ef. Черные сдались.** Эта партия входит в золотой фонд шахматного искусства.

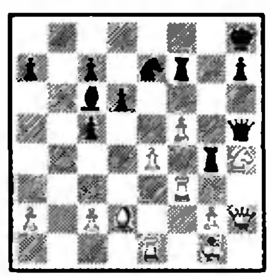
В трех следующих позициях белые (Чигорин) начинают и выигрывают.



1. Белые начинают и выигрывают.



2. Белые начинают и выигрывают.



3. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 31 марта 1981 г.

Цена 30 коп.
Индекс 70465

С помощью красочных чертежей (эпюров), помещённых на первой и на этой страницах обложки, можно строить много различных красивых многогранников, в том числе звездчатых. Как это делать, рассказывается на с. 39. Эти эпюры получены из многогранника, изображенного в правом верхнем углу рисунка. Сам многогранник является объединением двух икосаэдров; он получается, если из принадлежащей В. Гамаюнову модели объединения шести икосаэдров («Квант», 1980, № 11, Iс. обложки) выбросить любые четыре белых многогранника.